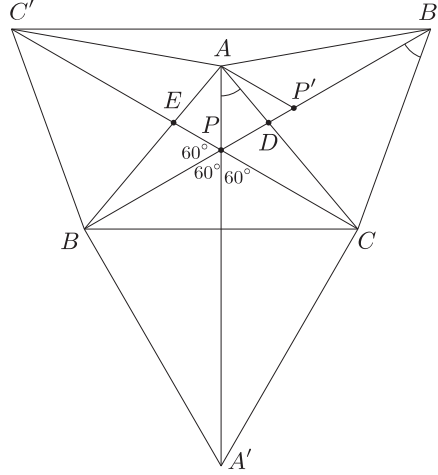


Megoldás. Mivel $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$, és e szögek összege 360° , a szögek mindegyike 120° -os. Tehát az AP , BP , CP egyenesek egymással páronként 60° -os szöget zárnak be, a P körüli teljes szöget 6 egyenlő részre osztják.

Jelölje az ABC háromszög oldalaira kifelé szerkesztett szabályos háromszögek harmadik csúcsát rendre C' , A' és B' (lásd az ábrát). Az $CB'AP$, $BA'CP$ és $AC'BP$ négyszögek húrnégyszögek, mert P -nél lévő szögük 120° -os, azzal szemközti szögük pedig 60° -os. Forgassuk el A körül $+60^\circ$ -kal az APC háromszöget. Ekkor C képe B' , P képét pedig jelöljük P' -vel. Mivel $\angle APP' = 60^\circ$, P' rajta van a BP egyenesen. De $\angle PP'A = 60^\circ$, s mivel $\angle AP'B' = \angle APC = 120^\circ$, a P , P' , B' pontok is egy egyenesre esnek, tehát B , P és B' kollineárisak. Mivel pedig $AP = PP'$ és $PC = P'B'$, azért $AP + BP + CP = BB'$. Ugyanígy látható be, hogy az AA' és a CC' szakaszok is tartalmazzák P -t, továbbá mindkét szakasz hossza megegyezik $AP + BP + CP$ -vel.



Az APD és a $B'PC$ háromszögek hasonlóak, mert $\angle APD = \angle B'PC = 60^\circ$ és $\angle PAD = \angle PB'C$, ugyanis mindkettő a PC ívhez tartozó kerületi szög a $CB'AP$ húrnégyszög körülírt körében. Ezért megfelelő oldalaik aránya megegyezik, $\frac{PD}{AP} = \frac{PC}{B'P}$. Ebből kifejezve PD -t, és felhasználva az $AP + BP + CP = BB'$ összefüggést valamint a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$PD = \frac{AP \cdot CP}{B'P} = \frac{AP \cdot CP}{BB' - BP} = \frac{AP \cdot CP}{AP + CP} \leq \frac{AP + CP}{4}.$$

Ugyanígy látható be, hogy

$$PE \leq \frac{AP + BP}{4}.$$

A koszinusztételt az EPD háromszög DE oldalára felírva kapjuk, hogy

$$DE^2 = PE^2 + PD^2 - 2PE \cdot PD \cos 120^\circ = PE^2 + PD^2 + PE \cdot PD.$$

Vagyis PD -t és PE -t az előző egyenlőtlenségekből kapott kifejezésekkel becslve:

$$DE^2 \leq \frac{(AP + BP)^2}{16} + \frac{(AP + CP)^2}{16} + \frac{(AP + BP)(AP + CP)}{16}.$$

Mivel $AP + BP = CC' - CP = PC'$ és $AP + CP = BB' - BP = PB'$, azért az egyenlőtlenséget

$$DE^2 \leq \frac{PC'^2 + PB'^2 + PC' \cdot PB'}{16}$$

alakba is írhatjuk. A koszinusztételt az $B'PC'$ háromszög $B'C'$ oldalára felírva kapjuk, hogy $B'C'^2 = PC'^2 + PB'^2 + PC' \cdot PB'$, tehát

$$DE^2 \leq \frac{B'C'^2}{16}, \text{ azaz } 4DE \leq B'C'.$$

Viszont a háromszög-egyenlőtlenség szerint $B'C' \leq B'A + AC'$, és mivel $B'A = AC$ valamint $AC' = AB$, azért $4DE \leq AB + AC$, ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha ABC szabályos háromszög.

Megjegyzés. A P pontot az ABC háromszög *izogonális pontjának* nevezzük. Ez az a pont, amelynek – abban az esetben, ha a háromszög szögei kisebbek 120° -nál – a háromszög csúcsaitól vett távolságösszege minimális. Ennek – valamint P azon tulajdonságainak, amelyeket a megoldás első részében beláttunk – bizonyítása megtalálható a *Geometria feladatok gyűjteménye* I. kötetének 1016–1019. feladataiban.