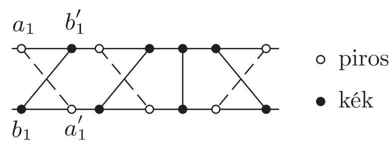
Megoldás. A kitűzött feladatnál általánosabban azt igazoljuk, hogy ha egy n elemű H számhalmazt kétféleképpen osztunk egy-egy k és m elemű részre, tehát $H = A \cup B = A' \cup B'$, ahol $|A| = |A'| = k$ és $|B| = |B'| = m$ és $k + m = n$ és az egyes részhalmazok elemeit növekvően rendezzük, tehát $A = \{a_i\colon i = 1, 2, \ldots, k\}$, $A' = \{a'_i\colon i = 1, 2, \ldots, k\}$, $B = \{b_j\colon j = 1, 2, \ldots, m\}$, $B' = \{b'_j\colon j = 1, 2, \ldots, m\}$, akkor

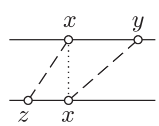
$$|a_1 - a'_1| + |a_2 - a'_2| + \ldots + |a_k - a'_k| = |b_1 - b'_1| + |b_2 - b'_2| + \ldots + |b_m - b'_m|.$$

Vegyünk föl két párhuzamos számegyenest és jelöljük meg mindkettőn a H halmaz elemeit. Az első számegyenesen az első felosztás szerint színezzük ki az A halmaz elemeit pirosra, a B halmaz elemeit pedig kékre, a másodikon pedig az A' halmaz elemeit színezzük pirosra és a B' halmaz elemeit kékre. Így fent és lent k–k darab piros és m–m darab kék pontot kapunk. Az azonos sorszámú piros pontokat kössük össze egy-egy piros, az azonos sorszámú kék pontokat pedig egy-egy kék szakasszal. Így egy efféle ábrát kapunk:



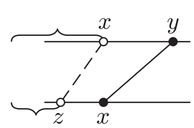
Ekkor a részhalmazok rendezése miatt sem a piros, sem pedig a kék szakaszok nem metszik egymást. Ha a *piros összeg* $P = |a_1 - a'_1| + |a_2 - a'_2| + \ldots + |a_k - a'_k|$, a *kék összeg* pedig $K = |b_1 - b'_1| + |b_2 - b'_2| + \ldots + |b_m - b'_m|$, akkor állításunk szerint $P = K$.

Legyen $x \in H$ tetszőleges és nézzük meg az x színezését fent és lent. Ha x fent is és lent is piros, azaz $x \in A \cap A'$, akkor x nem szerepel a kék összegben. Ha x két példányát – piros – szakasz köti össze, az a piros összegben $|x - x| = 0$ tagot jelent. Ha pedig x piros „szomszédai” az *ábra* szerint $z \in A'$, illetve $y \in A$, akkor az abszolút érték felbontása után a piros összegben $(y - x) + (x - z)$ adódik, az x tehát kiesik. Eszerint ha x mindkét példánya piros, akkor az abszolút értékeket felbontva és összevonva az ellenkező előjelű azonos abszolút értékű tagokat x sem a piros, sem pedig a kék összegben nem szerepel.



Ugyanez a helyzet, ha $x \in B \cap B'$, azaz x mindkét példánya kék.

Nézzük meg, mi történik, ha x két példánya különböző színű, mondjuk fent piros, lent pedig kék ($x \in A \cap B'$). Ekkor x piros példányából egy piros, kék példányából pedig egy kék szakasz indul. Azt állítjuk, hogy ez a két szakasz *metszi egymást,* az abszolút érték felbontása után tehát x két példánya *azonos* előjellel szerepel a piros és a kék összegben. Ez pedig már elég a bizonyítandó egyenlőséghez.



Ha az x felső piros példányából induló piros szakasz mégsem metszené az x alsó kék példányából induló kék szakaszt, akkor föltehető, hogy ez a két szakasz az *ábrán* látható módon helyezkedik el, tehát $z < x < y$. Ekkor viszont a felső számegyenes x-nél nem nagyobb H-beli pontjaiból induló valamennyi szakasz alsó végpontja az x-től balra helyezkedik el: a piros szakaszoké azért, mert egyikük sem metszheti a piros xz szakaszt, a kékeké pedig azért, mert egyikük sem metszheti a kék xy szakaszt. Ez viszont nem lehetséges, mert így a H halmaznak ugyanannyi x-nél nem nagyobb eleme volna fent, mint ahány x-nél kisebb eleme lent. Az x piros és kék példányából induló szakaszok tehát valóban metszik egymást, ezzel a bizonyítást befejeztük.