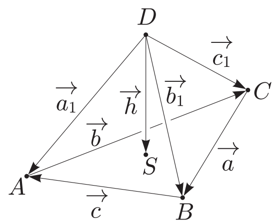
Megoldás. Irányítsuk a megadott szakaszokat az *ábrának* megfelelően.



Használjuk fel, hogy egy tetszőleges vonatkoztatási pontból (D) a háromszög súlypontjába mutató vektor egyenlő a vonatkoztatási pontból a háromszög csúcsaiba mutató vektorok számtani közepével.

Vagyis

$$\overrightarrow{h}=\frac{\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{c_1}}{3}.$$

Írjuk fel az $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektorokat az $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{c_1}$ vektorok segítségével:

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{c_1},\qquad \overrightarrow{b}=\overrightarrow{c_1}-\overrightarrow{a_1},\qquad \overrightarrow{c}=\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{b_1}.$$

Helyettesítsük be ezeket a bizonyítandó egyenlőségbe, majd a vektorok skaláris szorzásának tulajdonságait felhasználva végezzünk ekvivalens átalakításokat:

$$\left(\frac{\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{c_1}}{3}\right)^2=\frac{\overrightarrow{a_1}^{\,2}+\overrightarrow{b_1}^{\,2}+\overrightarrow{c_1}^{\,2}}{3}-\frac{\left(\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{c_1}\right)^2+\left(\overrightarrow{c_1}-\overrightarrow{a_1}\right)^2+\left(\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{b_1}\right)^2}{9},$$

$$\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{a_1}^{\,2}+\overrightarrow{b_1}^{\,2}+\overrightarrow{c_1}^{\,2}+2\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_1}+2\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{c_1}+2\overrightarrow{b_1}\overrightarrow{c_1}\right)=$$

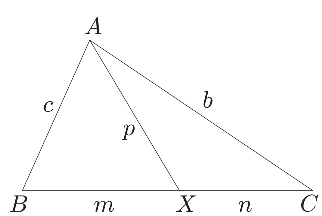
$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_1}^{\,2}+\overrightarrow{b_1}^{\,2}+\overrightarrow{c_1}^{\,2}\right)-\frac{1}{9}\left(2\overrightarrow{a_1}^{\,2}+2\overrightarrow{b_1}^{\,2}+2\overrightarrow{c_1}^{\,2}-2\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_1}-2\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{c_1}-2\overrightarrow{b_1}\overrightarrow{c_1}\right),$$

$$\frac{1}{9}\left(3\overrightarrow{a_1}^{\,2}+3\overrightarrow{b_1}^{\,2}+3\overrightarrow{c_1}^{\,2}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_1}^{\,2}+\overrightarrow{b_1}^{\,2}+\overrightarrow{c_1}^{\,2}\right),$$

ami pedig már nyilvánvaló azonosság, vagyis bármely tetraéderre igaz az állítás.

Megjegyzés. A *Stewart*[1]-tétel néven ismert összefüggés egy kevéssé közismert, igen hasznos átfogalmazásának felhasználásával a megoldás lépései átrendezhetők.

Maga a Stewart-tétel Coxeter[2] – Greitzer: *Az újrafelfedezett geometria* (Gondolat Kiadó, Budapest, 1977) című remek könyvének 22. oldalán az alábbi formában szerepel:



„Legyen az *ábrán* látható AX Ceva-féle szakasz hossza p. Ha az X pont a BC oldalt a $BX=m$ és $XC=n$ hosszúságú szakaszokra osztja, akkor

$$(S)\qquad a(p^2+mn)=b^2m+c^2n.\text{”}$$

Ha itt a szokásos módon bevezetjük a $\lambda=\dfrac{m}{a}$, $\mu=\dfrac{n}{a}$ „súlyokat”, akkor $\lambda+\mu=1$ és (S) átrendezésével az alábbi, „négyszakasztételnek” nevezhető alakhoz jutunk:

$$(N)\qquad AX^2=\lambda\cdot AC^2+\mu\cdot AB^2-\lambda\mu\cdot BC^2.$$

A tétel fenti alakja felidézheti a szakasz adott arányú osztópontjába mutató helyvektor jól ismert $\overrightarrow{AX}=\lambda\cdot\overrightarrow{AC}+\mu\cdot\overrightarrow{AB}$ felírását és ezzel (N) egy másfajta, a feladat közölt megoldásához hasonló vektoralgebrai bizonyítására is rámutat. Az összefüggés a

[1] *Matthew Stuart* (1715–1785), skót matematikus.

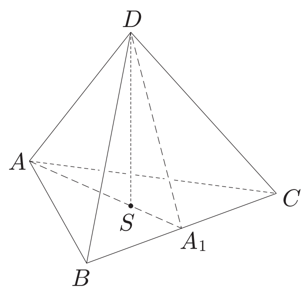
[2] *Donald Coxeter* (1907–2003), a XX. század egyik legnagyobb geométere.

koszinusztétel sajátos átfogalmazásának is tekinthető (egy másik bizonyítása épp ezt használja föl); (N)-ben viszont már nem szerepel a koszinuszfüggvény. Ilyen típusú ismert összefüggés az úgynevezett paralelogramma tétel is: a koszinuszfüggvény csupán a bizonyításban vesz részt, az eredményből már ideális katalizátorként eltűnik.

A fenti (N) alak speciális esetként $(\lambda = \mu = \frac{1}{2})$ tartalmazza a súlyvonaltétel néven ismert összefüggést és így magát a paralelogramma tételt is. Ebben a formában talán jobban látszik, hogy a négy adott elrendezésű szakasz közül bármelyik kifejezhető a további három segítségével.

Az is ellenőrizhető, hogy ha a λ, μ számokat az ismert módon előjeles arányoknak tekintjük, akkor a tétel változatlan formában igaz marad akkor is, ha az X a BC egyenes tetszőleges pontja.

E hosszúra nyúlt bevezető után nézzük, hogyan oldható meg a feladat a négyszakasz-tétel ismételt alkalmazásával.



Ha A_1 jelöli a BC oldal felezőpontját, S pedig az ABC lap súlypontját, akkor a DAA_1 háromszögben az ismert osztásarányok alapján (N) szerint:

$$DS^2 = \frac{2}{3}\,DA_1^2 + \frac{1}{3}\,DA^2 - \frac{2}{9}\,AA_1^2.$$

A súlyvonaltétel kétszeri alkalmazásával a feladat jelölései szerint:

$$DA_1^2 = \frac{1}{2}\,DB^2 + \frac{1}{2}\,DC^2 - \frac{1}{4}\,BC^2 = \frac{1}{2}\,b_1^2 + \frac{1}{2}\,c_1^2 - \frac{1}{4}\,a^2,$$

illetve

$$AA_1^2 = \frac{1}{2}\,AC^2 + \frac{1}{2}\,AB^2 - \frac{1}{4}\,BC^2 = \frac{1}{2}\,b^2 + \frac{1}{2}\,c^2 - \frac{1}{4}\,a^2.$$

Behelyettesítve és rendezve:

$$h^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\,b_1^2 + \frac{1}{2}\,c_1^2 - \frac{1}{4}\,a^2\right) + \frac{1}{3}\,a_1^2 - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\,b^2 + \frac{1}{2}\,c^2 - \frac{1}{4}\,a^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right) - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

és ezt kellett bizonyítani.

Látható, hogy a közölt megoldás vektorszámítási lépéseinek lényegét érdemes leválasztani a konkrét feladatról; így általában is használható összefüggéshez jutunk. Jobban láthatók az esetleges általánosítások is: a négyszakasz-tétel birtokában világos, hogy a feladat lényegében egyfajta „hétszakasz”-egyenlőség formájában kapcsolja össze az ABC háromszög síkjának tetszőleges S pontjával együtt a tér egy adott D pontjától mért távolságokat. Mindezek végiggondolása érdekes lehet az Olvasó számára.