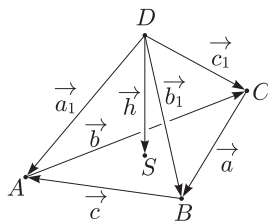


Megoldás. Irányítsuk a megadott szakaszokat az *ábrának* megfelelően.



Használjuk fel, hogy egy tetszőleges vonatkoztatási pontból (D) a háromszög súlypontjába mutató vektor egyenlő a vonatkoztatási pontból a háromszög csúcaiba mutató vektorok számtani közepével.

Vagyis

$$\vec{h} = \frac{\vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{c}_1}{3}.$$

Írjuk fel az \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} vektorokat az \vec{a}_1 , \vec{b}_1 , \vec{c}_1 vektorok segítségével:

$$\vec{a} = \vec{b}_1 - \vec{c}_1, \quad \vec{b} = \vec{c}_1 - \vec{a}_1, \quad \vec{c} = \vec{a}_1 - \vec{b}_1.$$

Helyettesítsük be ezeket a bizonyítandó egyenlőségbe, majd a vektorok skaláris szorzásának tulajdonságait felhasználva végezzünk ekvivalens átalakításokat:

$$\left(\frac{\vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{c}_1}{3} \right)^2 = \frac{\vec{a}_1^2 + \vec{b}_1^2 + \vec{c}_1^2}{3} - \frac{(\vec{b}_1 - \vec{c}_1)^2 + (\vec{c}_1 - \vec{a}_1)^2 + (\vec{a}_1 - \vec{b}_1)^2}{9},$$

$$\frac{1}{9}(\vec{a}_1^2 + \vec{b}_1^2 + \vec{c}_1^2 + 2\vec{a}_1\vec{b}_1 + 2\vec{a}_1\vec{c}_1 + 2\vec{b}_1\vec{c}_1) =$$

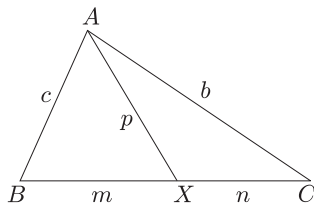
$$= \frac{1}{3}(\vec{a}_1^2 + \vec{b}_1^2 + \vec{c}_1^2) - \frac{1}{9}(2\vec{a}_1^2 + 2\vec{b}_1^2 + 2\vec{c}_1^2 - 2\vec{a}_1\vec{b}_1 - 2\vec{a}_1\vec{c}_1 - 2\vec{b}_1\vec{c}_1),$$

$$\frac{1}{9}(3\vec{a}_1^2 + 3\vec{b}_1^2 + 3\vec{c}_1^2) = \frac{1}{3}(\vec{a}_1^2 + \vec{b}_1^2 + \vec{c}_1^2),$$

ami pedig már nyilvánvaló azonosság, vagyis bármely tetraéderre igaz az állítás.

Megjegyzés. A *Stewart*¹-tétel néven ismert összefüggés egy kevésbé közismert, igen hasznos átfogalmazásának felhasználásával a megoldás lépései átrendezhetőek.

Maga a Stewart-tétel Coxeter² – Greitzer: *Az újrafelfedezett geometria* (Gondolat Kiadó, Budapest, 1977) című remek könyvének 22. oldalán az alábbi formában szerepel:



„Legyen az *ábrán* látható AX Ceva-féle szakasz hossza p . Ha az X pont a BC oldalt a $BX = m$ és $XC = n$ hosszúságú szakaszokra osztja, akkor

$$(S) \quad a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n.”$$

Ha itt a szokásos módon bevezetjük a $\lambda = \frac{m}{a}$, $\mu = \frac{n}{a}$ „súlyokat”, akkor $\lambda + \mu = 1$ és (S) átrendezésével az alábbi, „négyszakasz-tételnek” nevezhető alakhoz jutunk:

$$(N) \quad AX^2 = \lambda \cdot AC^2 + \mu \cdot AB^2 - \lambda\mu \cdot BC^2.$$

A tétel fenti alakja felidézheti a szakasz adott arányú osztópontjába mutató helyvektor jól ismert $\vec{AX} = \lambda \cdot \vec{AC} + \mu \cdot \vec{AB}$ felírását és ezzel (N) egy másfajta, a feladat között megoldásához hasonló vektoralgebrai bizonyítására is rámutat. Az összefüggés a

¹ *Matthew Stuart* (1715–1785), skót matematikus.

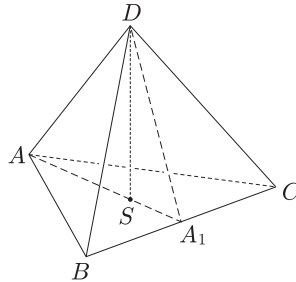
² *Donald Coxeter* (1907–2003), a XX. század egyik legnagyobb geometere.

koszinusztétel sajátos átfogalmazásának is tekinthető (egy másik bizonyítása épp ezt használja föl); (N) -ben viszont már nem szerepel a koszinuszfüggvény. Ilyen típusú ismert összefüggés az úgynevezett paralelogramma tétel is: a koszinuszfüggvény csupán a bizonyításban vesz részt, az eredményből már ideális katalizátorként eltűnik.

A fenti (N) alak speciális esetként $(\lambda = \mu = \frac{1}{2})$ tartalmazza a súlyvonal-tétel néven ismert összefüggést és így magát a paralelogramma tételt is. Ebben a formában talán jobban látszik, hogy a négy adott elrendezésű szakasz közül bármelyik kifejezhető a további három segítségével.

Az is ellenőrizhető, hogy ha a λ, μ számokat az ismert módon előjeles arányoknak tekintjük, akkor a tétel változatlan formában igaz marad akkor is, ha az X a BC egyenes tetszőleges pontja.

E hosszúra nyúlt bevezető után nézzük, hogyan oldható meg a feladat a négyszakasztétel ismételt alkalmazásával.



Ha A_1 jelöli a BC oldal felezőpontját, S pedig az ABC lap súlypontját, akkor a DAA_1 háromszögben az ismert osztásarányok alapján (N) szerint:

$$DS^2 = \frac{2}{3} DA_1^2 + \frac{1}{3} DA^2 - \frac{2}{9} AA_1^2.$$

A súlyvonal-tétel kétszeri alkalmazásával a feladat jelölései szerint:

$$DA_1^2 = \frac{1}{2} DB^2 + \frac{1}{2} DC^2 - \frac{1}{4} BC^2 = \frac{1}{2} b_1^2 + \frac{1}{2} c_1^2 - \frac{1}{4} a^2,$$

illetve

$$AA_1^2 = \frac{1}{2} AC^2 + \frac{1}{2} AB^2 - \frac{1}{4} BC^2 = \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{4} a^2.$$

Behelyettesítve és rendezve:

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} b_1^2 + \frac{1}{2} c_1^2 - \frac{1}{4} a^2 \right) + \frac{1}{3} a_1^2 - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{4} a^2 \right) = \\ &= \frac{1}{3} (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - \frac{1}{9} (a^2 + b^2 + c^2), \end{aligned}$$

és ezt kellett bizonyítani.

Látható, hogy a közölt megoldás vektorszámítási lépéseinek lényegét érdemes leválasztani a konkrét feladatról; így általában is használható összefüggéshez jutunk. Jobban láthatók az esetleges általánosítások is: a négyszakasztétel birtokában világos, hogy a feladat lényegében egyfajta „hétszakasz”-egyenlőség formájában kapcsolja össze az ABC háromszög síkjának tetszőleges S pontjával együtt a tér egy adott D pontjától mért távolságokat. Mindezek végiggondolása érdekes lehet az Olvasó számára.