

I. megoldás. Két szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének szorzata egyenlő a két szám szorzatával:

$$(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b.$$

Jelöljük a és b legnagyobb közös osztóját a továbbiakban d -vel. A feladat feltétele szerint $d + [a; b] = a + b$. Felhasználva az említett összefüggést, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$d + \frac{a \cdot b}{d} = a + b,$$

Rendezés után szorzattá alakíthatunk:

$$d^2 - (a + b) \cdot d + a \cdot b = (d - a)(d - b) = 0.$$

Ha $d = a$, azaz a legnagyobb közös osztó a -val egyenlő, akkor b többszöröse a -nak. Ha pedig $d = b$, akkor a többszöröse b -nek. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

II. megoldás. Legyen $a = d \cdot \ell$ és $b = d \cdot k$, ahol k és ℓ relatív prímelek. Így $(a; b) = d$ és $[a; b] = d \cdot k \cdot \ell$.

Az egyenlet: $d + d \cdot k \cdot \ell = d \cdot \ell + d \cdot k$. Nyilván $d \neq 0$, így oszthatunk vele:

$$1 + k \cdot \ell = \ell + k, \quad k \cdot \ell - \ell - k + 1 = 0, \quad (k - 1)(\ell - 1) = 0,$$

ahonnan $k = 1$ vagy $\ell = 1$ adódik. Mindkét esetben valamelyik adott számmal egyenlő a legnagyobb közös osztó, s ekkor ez a szám osztója a másiknak.