

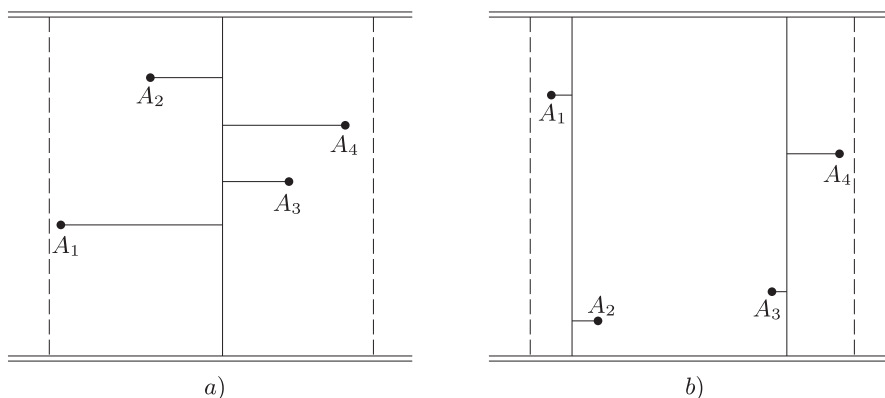
I. megoldás. Fusson a két autót a terület északi és déli oldalán, és jelöljük a megfigyelő állomásokat nyugatról keletre haladva A_1, A_2, A_3, A_4 -gyel, a négyzet nyugati határától mért távolságukat a_1, a_2, a_3, a_4 -gyel. Ezek között egyenlők is lehetnek, ez esetben az állomások jelölése tetszőleges. Eszerint $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$.

Ha $a_3 - a_2 \leq 5$ km, akkor építsünk egy bekötőutat autótúttól autótúttig A_2 és A_3 között, illetőleg a kettőn keresztül, ha $a_2 = a_3$, továbbá mindegyik állomástól eddig az útig egy nyugat–keleti bekötőutat. Az előbbi út hossza 10 km, az A_1 -től és A_4 -től épített utak összhossza $a_4 - a_1 \leq 10$ km, az A_2 -től és A_3 -ból épített utaké $a_3 - a_2 \geq 5$ km a feltétel szerint. Az egész úthálózat hossza tehát legfeljebb 25 km.

Ha $a_3 - a_2 \geq 5$ km, akkor építsünk egy–egy észak–déli bekötőutat A_1 és A_2 közt is, meg A_3 és A_4 között is, ill. a megfigyelőállomásokon át, ha $a_1 = a_2$ vagy $a_3 = a_4$, továbbá A_1 -ből és A_2 -ből az elsőig, A_3 -ból és A_4 -ből a másodikig nyugat–keleti bekötőutakat. Ennek az útrendszernek a hossza

$$20 + a_2 - a_1 + a_4 - a_3 = 20 + (a_4 - a_1) - (a_3 - a_2) \leq 20 + 10 - 5 = 25 \text{ km},$$

tehát ebben az esetben is van legfeljebb 25 km-es úthálózat a kívánt tulajdonságokkal (1. ábra a) és b) része).

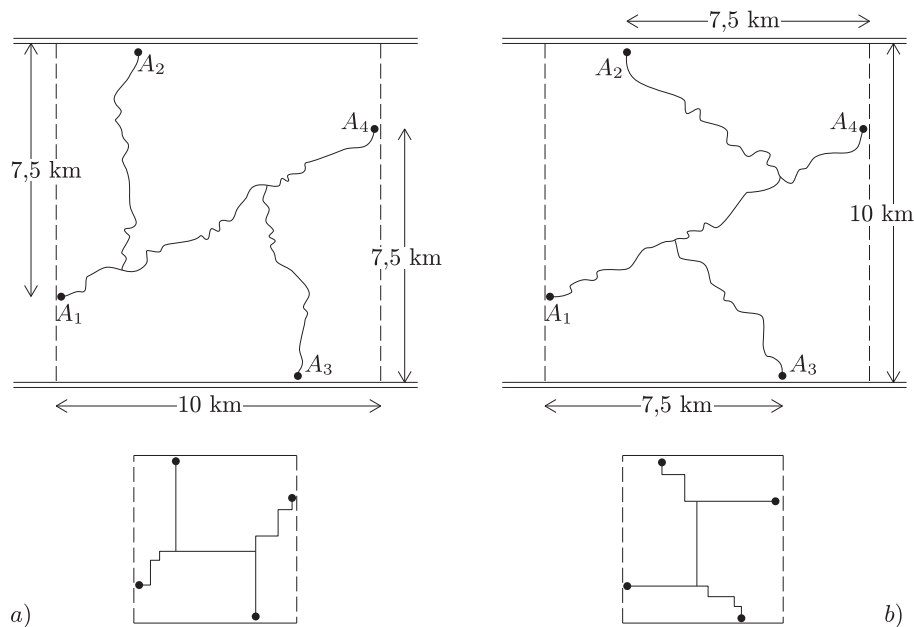


1. ábra

Megmutatjuk, hogy 25 km-nél rövidebb úthálózattal nem oldható meg a feladat, ha pl. a megfigyelő állomások a terület határán vannak a délnyugati saroktól északra, az északnyugatiától keletre, az északkeletiától délre és a délkeletiától nyugatra 2,5 – 2,5 km-re. Ebben a sorrendben jelöljük őket A_1, A_2, A_4, A_3 -mal.

Egy legrövidebb úthálózat legfeljebb két egymással össze nem függő részből állhat, mert ha legalább háromból áll, akkor már az észak–déli irányú útszakaszok legalább 30 km-t tesznek ki. Ha két részből áll, akkor van legalább 20 km-nyi észak–déli szakasza. Ebben az esetben valamelyik rész legalább két állomást tartalmaz. Ha A_1 -ből A_3 -at vagy A_4 -et, vagy A_4 -ből A_2 -t el lehet érni, akkor a nyugat–keleti irányú szakaszok összesen legalább 7,5 km-t tesznek ki, ha pedig A_1 -ből A_2 -t, A_3 -ból A_4 -et lehet csak elérni, ehhez tegyalább kétszer 2,5 km-nyi nyugat–keleti irányú útszakasz szükséges.

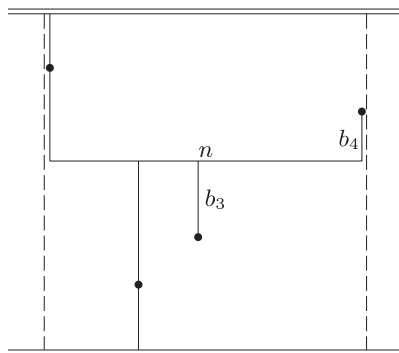
Ha végül mindegyik állomásról bármelyikre el lehet jutni bekötőutakon haladva, akkor tekintsük az úthálózatnak A_1 -ből A_4 -be vezető részét és azt a pontot, ahol ezt A_2 -ből, ill. A_3 -ból először érhetjük el. Ha A_1 -ből indulva előbb az A_2 felé vezető elágazást érjük el, akkor van az úthálózatnak egy A_1, A_2 közti és egy A_3, A_4 közti része, amelyeknek nincs közös pontja; ezeknek legalább 7,5–7,5 km-nyi észak–déli szakasza van, az egész hálózat nyugat–keleti szakaszai viszont legalább 10 km-t tesznek ki. Ha viszont az A_3 -ba vezető elágazást érjük el előbb, vagy négyes útkereszteződés van, akkor A_1, A_3 és A_2, A_4 közt van olyan összeköttetés, amelyeknek legfeljebb egy közös pontja van, és egész hasonlóan látható, hogy ekkor legalább 15 km-nyi nyugat–keleti és 10 km-nyi észak–déli útszakasz van (2. ábra a) és b) része). – Evvel a feladatot teljes egészében megoldottuk.



2. ábra

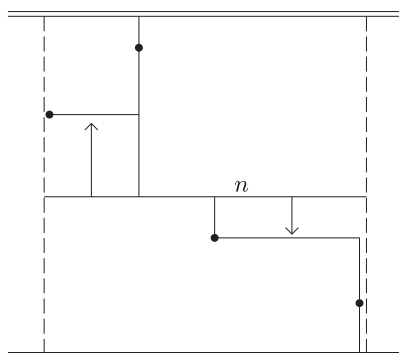
Megjegyzés. A megoldás első része mutatja, hogy 25 km-nél rövidebb útrendszer is van, ha A_1 és A_4 nem a terület nyugati és keleti határvonalán van, és akkor is, ha $a_3 - a_2$ nem éppen 5 km. A megoldás ezen részében szereplő első útrendszerhez hasonló szerkeszthető az észak–déli és nyugat–keleti irány szerepének megcserélésével is, ami bizonyos feltételek mellett ismét 25 km-nél nem hosszabb útrendszert szolgáltat. Ebből további szükséges feltételek lesznek leolvashatók.

Építsünk egy n nyugat–keleti utat az egész területen át, amelyiktől két megfigyelő állomás északra van, kettő délre (esetleg két állomáson áthalad, a másik kettőt elválasztja, vagy legalább három állomáson áthalad). Ezután a legészakibb állomáson vagy az ilyenek egyikén át az északi autóúttól, a legdélibb állomáson vagy azok egyikén át a déli autóúttól n -ig észak–déli bekötőutat építünk és a másik két állomástól n -ig szintén (3. ábra). Ha az utolsó két út hossza b_3 és b_4 , akkor az egész útrendszeré $20 + b_3 + b_4$, és ez kisebb, mint 25 km, ha $b_3 + b_4 < 5$ km.



3. ábra

Ha az n -en keletkező északi elágazások és déli elágazások nem választják el egymást, akkor az úthálózat hossza 20 km-re csökkenthető. Mozdítsuk el ugyanis n -nek a nyugati határtól a második elágazásig terjedő részét arra, amerre az elágazások vezetnek a közelebbi állomásig, és hasonlóan módosítsuk a harmadik elágazástól a terület határáig terjedő részét is. Az új útrendszer legfőljebb 20 km hosszú (4. ábra).



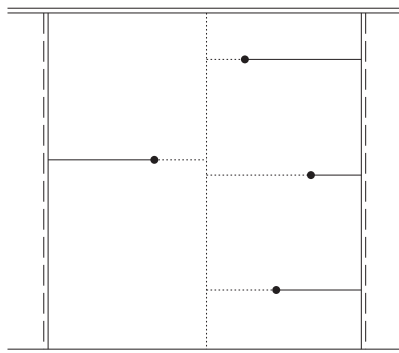
4. ábra

Azt kaptuk tehát, hogy csak akkor nem elegendő 25 km-nél rövidebb úthálózat, ha a következő feltételek teljesülnek:

- A terület nyugati és keleti határa mentén is legyen megfigyelőállomás;
- a területet egy észak–déli és egy kelet–nyugati vonallal felosztva úgy, hogy két állomás a vonaltól ne feküdjenek keletre, a másik kettő ne nyugatra és hasonlóan a másik vonaltól kettő ne feküdjen délre, a másik kettő ne északra, akkor a keletkező négy téglalap egyike se tartalmazzon a belsejében és határán egynél több állomást;
- az említett kelet–nyugati vonalhoz két oldalról legközelebb eső állomás e vonaltól vett távolságának összege éppen 5 km legyen;
- az észak–déli vonal két oldalán a legközelebbi állomások távolságának összege legalább 5 km legyen.

A fenti megoldás második részének gondolatmenetével belátható, hogy ha mind a négy feltétel teljesül, akkor szükség is van mindig 25 km-es úthálózatra.

II. megoldás. Két úthálózatot tervezünk és utólag választjuk ki a kedvezőbbet. Az egyiknek két észak–déli útszakasza lesz a terület két határán, a másiknak egy a terület középvonala mentén. (Az 5. ábrán az első úthálózat folytonos, a második pontozott vonallal van rajzolva.) Ezután minden megfigyelőállomástól kelet–nyugati utat építünk a terület közelebbi határáig, ill. a középvonalig (a középvonalra eső esetleges állomástól tetszés szerint az egyik határig). Világos, hogy a pontozott útrendszeren is el lehet jutni minden állomástól bármelyik autópályáig, a (két részből álló) folytonosan kihúzott útrendszer mentén is.



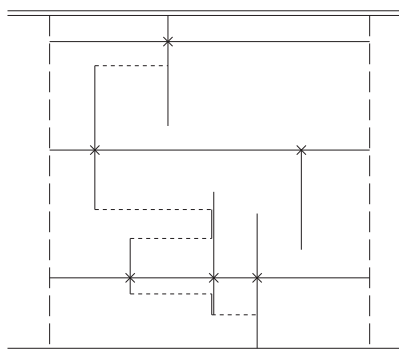
5. ábra

A két úthálózat együtt 30 km észak–déli és négyszer 5 km kelet–nyugati útszakaszból áll, tehát 50 km hosszú, így legalább az egyik legfeljebb 25 km-es. Ez (illetőleg bármelyik, ha a kettő egyenlő hosszú) kielégíti a feladat követelményeit.

Szükség van legalább 25 km-nyi úthálózatra, ha pl. az A_1 és A_2 megfigyelő állomás a terület északnyugati és északkeleti sarkában van, A_2 és A_3 pedig a déli út mentén, a nyugati, ill. keleti határtól 2,5–2,5 km-re.

Vizsgáljuk először egy, a feltételeket kielégítő bekötő-útrendszer észak–déli útszakaszeit. Ez összesen véges számú útszakasz, egy tetszés szerinti kelet–nyugati egyenes ezeket véges számú pontban metszi; legalább egyben, mert ellenkező esetben volna olyan kelet–nyugati egyenes, amelyen nem lehetne átjutni az északi úttól a déli felé.

Minden nyugat–keleti egyenes első ilyen metszéspontját véve, ezek véges sok útszakaszt futnak be, amelyek összhossza 10 km (6. ábra). Hasonlóan, ha minden nyugat–keleti egyenes legalább két vagy három észak–déli útszakaszt metsz, akkor a metszéspontok legalább 20, ill. 30 km-nyi észak–déli útszakaszon futnak végig.

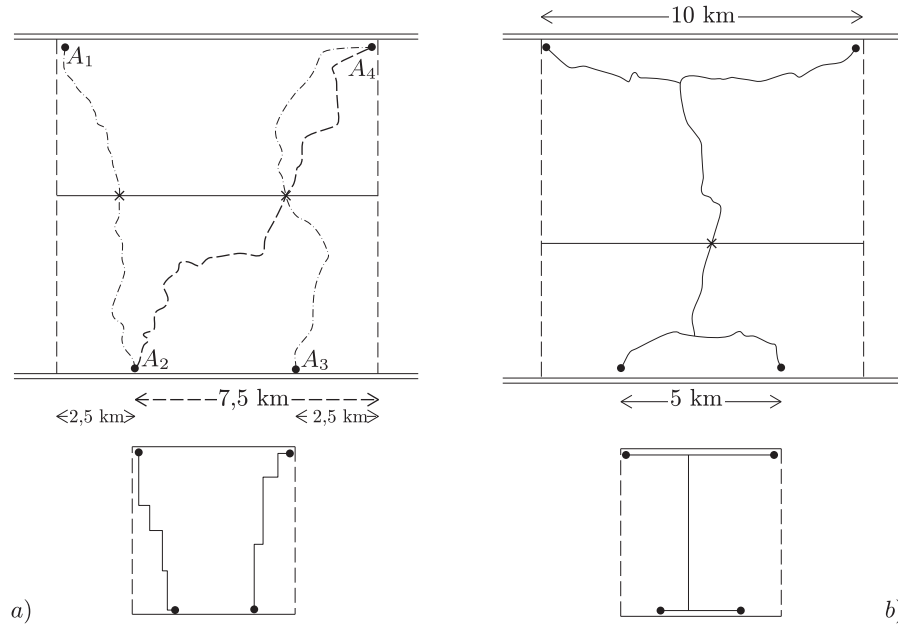


6. ábra

Az olyan útrendszerek kedvezőtlenek, amelyeknél mindegyik egyenes legalább 3 metszéspontot szolgáltat. Ha mindegyik egyenesen van legalább 2 metszéspont, de több nem mindegyiken, akkor szemeljük ki egy egyenest, amelyen

két metszéspont van. Mindegyik megfigyelő állomástól el kell tudni jutni valamelyik metszésponthoz, hogy eljuthassunk a nyugat–keleti vonal másik oldalán levő autóúthoz. Ha A_1 -ből és A_3 -ból vagy A_2 -ből és A_4 -ből ugyanahhoz a metszésponthoz lehet eljutni, akkor a megfelelő két állomás közt van egy olyan útrész, amelyiknek legalább 7,5 km-nyi nyugat–keleti szakasza van (7a. ábra, szaggatott vonal); ha pedig A_1 és A_2 -ből az egyik metszéspont érhető el, A_3 , és A_4 -ből a másik, akkor van kétszer 2,5 km-nyi nyugat–keleti útszakasz (7a. ábra, pontozott vonal), és mindkét esetben legalább 20 km összhosszú észak–déli útszakaszok, mint láttuk.

Ha végül van olyan nyugat–keleti egyenes, amelyiken csak egy metszéspont van, akkor egy ilyen metszésponthoz mindegyik állomásról el lehet jutni (7b. ábra). Ekkor azonban az úthálózatnak az egyenestől északra eső része legalább 10 km-nyi nyugat–keleti útszakaszt tartalmaz, a déli része legalább 5 km-nyit, ehhez járul legalább 10 km-nyi észak–déli útszakasz. Mindig szükség van tehát legalább 25 km-es úthálózatra.



7. ábra

Megjegyzések. 1. A megoldás első részének gondolatmenete Hangya László megoldása. Ez alkalmas sok további felmerülő kérdés megválaszolására is.

Ha pl. 4 helyett 5 vagy 6 megfigyelőállomás van a területen, akkor a fenti módon megszerkesztett két úthálózat összhossza 55, ill. 60 km lesz, így legfeljebb 27,5, ill. 30 km hosszú úthálózattal megoldható a feladat.

2. Ugyanesak 30 km-t ad korlátul 6 pont esetén a gondolat következő módosított alkalmazása is. Osszuk a területet 4 észak–déli úttal 3 egyenlő széles részre és mindegyik megfigyelő állomástól az öt közrefogó két útig építünk merőleges bekötőutat. Minden második észak–déli út a rá merőleges, csatlakozó útszakaszokkal alkotja az egyik útrendszert, a kimaradók a másikat. A két útrendszer összhosszára így

$$4 \cdot 10 + 6 \cdot \frac{10}{3} = 60 \text{ km}$$

adódik, mint az előbbi esetben is.

Nem nehéz belátni, hogy legalább 30 km-nyi útra szükség is van, ha a megfigyelő állomások pl. a terület két útmenti oldalának közepén és két szélén vannak.

3. 5 állomás esetén van mindig 27,5 km-nél rövidebb úthálózat is. A legjobb korlát megkeresését feladatul hagyom.

4. Hasonló okoskodással, alkalmasan választva azt is, hogy hány sávra osztjuk a területet, n pont esetén $(2\sqrt{n} + 1) \cdot 5$ km, ill. annál kevéssel nagyobb felső korlát adódik a szükséges úthálózat hosszára.