

**I. megoldás.** Állítjuk, hogy a szóban forgó háromszög körülírt körének középpontja minden háromszögben megfelel az állításnak. Hegyesszögű háromszög esetén ez belső pont, és a csúcsoktól egyenlő távolságra van.

Előkészítésül bebizonyítjuk azt a nevezetes tételt, hogy adott sugarú körbe írható háromszögek közül a szabályosnak a legnagyobb a területe.

1985-05-203-1.eps

### 1. ábra

Írjunk be a  $k$  körbe egy nem-szabályos  $ABC$  háromszöget, és jelöljük  $A$ -val,  $C$ -vel legnagyobb, illetve legkisebb szögének csúcsát (1. ábra). Nyilvánvaló, hogy az  $A$ -nál levő szög nagyobb, mint  $60^\circ$ , a  $C$ -nél levő pedig kisebb nála. Mérjük föl a  $CAB' \angle = 60^\circ$  szöget az  $AC$  egyenes  $B$ -t tartalmazó partján. Az új szárnak  $k$ -n levő  $B'$  pontja távolabb van az  $AC$  alaptól, mint  $B$ , így az  $AB'C$  háromszög területe nagyobb, mint  $ABC$  területe. Valóban, a  $B$ -n átmenő,  $AC$ -vel párhuzamos egyenesnek  $k$ -n levő  $B^*$  pontjára  $B^*AC \angle = BCA \angle < 60^\circ$ , tehát  $AB'$  a  $B^*AB$  szögtartományban halad.

Az  $AB'C$  háromszögben  $A$ -nál  $60^\circ$ -os szög van. Ha a  $B'$ -nél és  $C$ -nél levő szögek nem  $60^\circ$ -osak, akkor egyik kisebb, a másik nagyobb, mint  $60^\circ$ , ezért ennél is nagyobb területű, a  $k$ -ba írt háromszöget mutathatunk fel: ennek új,  $A'$  csúcsát a  $CB'$  húr felező merőlegese metszi ki a  $B$ -t tartalmazó  $CB'$  ívből. Ekkor  $A'$  az ívnek a  $CB'$  alaptól legtávolabbi pontja, az  $A'B'C$  háromszög területe nagyobb, mint az  $AB'C$  háromszög területe, másfelől  $CA'B' \angle = CAB' \angle = 60^\circ$ , és  $A'C = A'B'$ . Ez pedig azt jelenti, hogy az  $A'B'C$  háromszög szabályos. Területe tovább nem növelhető. Ezzel bebizonyítottuk állításunkat.

Segédételünkből következik, hogy ha különböző alakú, de egyenlő területű háromszögeknek tekintjük a körülírt körét, ezek sugarai közül a szabályos háromszög köré írt körnek a sugara kisebb lesz, mint bármely más alakú háromszög esetében. Ezt indirekt úton látjuk be. Legyenek  $H_1$  és  $H_2$  egységnyi területű háromszögek, és  $H_1$  szabályos,  $H_2$  nem-szabályos, körülírt körük sugara  $r_1$ , ill.  $r_2$  állítjuk, hogy  $r_2 > r_1$ . Ha ugyanis  $r_2 \leq r_1$  volna, vegyük az  $r_2$  sugarú körbe írt  $H^*$  szabályos háromszöget. Ennek  $t^*$  területére a tétel szerint  $t^* > 1$  (amennyi  $H_2$  területe).  $H_2^*$ -ből  $r_1 : r_2 = \lambda$  arányú (lineáris) nagyítással kapnánk  $H_1$ -et, és eszerint  $H_1$  területe  $\lambda^2 \cdot t^* > 1$  lenne, hiszen föltevésünk szerint  $\lambda^2 \geq 1$ . Az ellentmondás mutatja állításunk helyességét.

Már most az egységnyi területű szabályos háromszög oldala  $a = \sqrt{4 : \sqrt{3}} = 2 : \sqrt[4]{3}$ , a köréje írt kör sugara pedig

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt[4]{9}} = \frac{2}{\sqrt[4]{27}} = \frac{2}{3} \sqrt[4]{3},$$

éppen az állításban szereplő állandó.

1985-05-204-1.eps

### 2. ábra

Ha tehát egységnyi területű háromszögek csúcsai körül ezen  $r$  sugárral írunk köröket, e 3 kör szabályos háromszög esetében a középpontban metszi egymást, más alakú háromszögben pedig nem tartalmazzák annak középpontját, ilyenkor a középpont körüli lefedetlen síkrész (3 körív és még esetleg egyenes szakaszok határolják) minden pontja megfelel az állításnak.

**II. megoldás.** Írjuk fel a háromszög területét szögei és a körülírt kör sugara segítségével:

$$T = \frac{abc}{4r} = \frac{2r \sin \alpha \cdot 2r \sin \beta \cdot 2r \sin \gamma}{4r} = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 1.$$

Ebből:

$$(1) \quad r = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}}.$$

Alkalmazzuk a  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$ ,  $\sin \gamma$  pozitív számokra a számtani–mértani közép közti egyenlőtlenséget, majd mivel a  $\sin x$  függvény a  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  intervallumban konkáv, a Jensen-egyenlőtlenséget:<sup>1</sup>

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \left( \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \right)^3 \leq \left( \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^3 = (\sin 60^\circ)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Ezt behelyettesítve (1)-be:

$$r \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{8}{3\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt[4]{3}}{3},$$

amivel beláttuk, hogy a háromszög körülírt körének középpontja a feladat feltételeinek megfelelő pont.

<sup>1</sup>Lásd pl. *Molnár Emil*: Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947–1970 (Tankönyvkiadó, Budapest 1974) 516. oldal.