

Az 1990. novemberi számban jelent meg a fenti gyakorlat megoldása, vagyis *azon síkok számának a meghatározása, amelyek egy adott kockának legalább három élfelező pontját tartalmazzák*. Az ismertett megoldás egy részének felhasználásával a keresett számot becslések segítségével is megkaphatjuk.

Nevezzük a keresett síkokat jónak, jó háromszögnek pedig azokat, amelyeknek a csúcsai a kocka élfelezőpontjai. Jelöljük S_i -vel a pontosan i darab élfelezőpontot tartalmazó jó síkok halmazát, $|S_i|$ -vel pedig ezeknek a síkoknak a számát. A feladat ekkor $\sum_{i \geq 3} |S_i|$ meghatározása. A megoldás két részből fog állni:

1. Néhány jó sík (ill. azok számának) megadása.

2. Annak igazolása, hogy a megadottakon kívül nincs több jó sík.

Az 1. ponthoz használjuk fel a lapban közölt megoldásnak azt az eredményét, mely szerint $|S_3| \geq 56$, $|S_4| \geq 21$, $|S_5| \geq 4$ (ez lényegében leolvasható a 388-389. oldalon a 2., 3., 4., 5. és 7. ábrákról). Másrészt a 12 élfelező pont összesen $\binom{12}{3}$ jó háromszöget határoz meg, és egy S_i -beli jó síkra $\binom{i}{3}$ jó háromszög illeszkedik.

Így

$$\begin{aligned} 220 = \binom{12}{3} &= \sum_{i \geq 3} |S_i| \binom{i}{3} \geq |S_3| \binom{3}{3} + |S_4| \binom{4}{3} + |S_6| \binom{6}{3} \geq \\ &\geq 56 \cdot \binom{3}{3} + 21 \cdot \binom{4}{3} + 4 \cdot \binom{6}{3} = 220. \end{aligned}$$

Mivel a legkisebbként kapott rész is 220, ezért *mindenütt egyenlőség van*, azaz $|S_3| = 56$, $|S_4| = 21$ és $|S_6| = 4$, és $i \neq 3, 4, 6$ esetén $|S_i| = 0$. Tehát a viszonylag könnyen megadható $56 + 21 + 4 = 81$ darab jó sík tartalmazza az összes (220 db) jó háromszöget, azaz valamennyi jó síkot felsoroltuk.

Párniczky Benedek (I. o. t.)