

I. megoldás. A feladat feltétele ekvivalens azzal, hogy $f: R \rightarrow R$ olyan monoton függvény, melyre létezik olyan pozitív c , hogy minden valós x, y -ra $|f(x) + f(y) - f(x+y)| < c$. Ha ugyanis a feladat feltételei teljesülnek, akkor a $c = \max(c_1, c_2) + 1$ megfelelő, míg ha az új feltétel teljesül, akkor $c_1 = c_2 = c$ megfelelő. Ezentúl mindig az új feltételre hivatkozunk.

Feltehetjük, hogy f monoton nő. Ha ugyanis ezen esetre már beláttuk az állítást, akkor egy monoton csökkenő, a feltételeket teljesítő f -hez létezik olyan k , hogy $-f(x) - kx$ függvény korlátos, hiszen $-f$ is teljesíti a feltételeket. Ekkor azonban $f(x) - (-k)x$ is korlátos.

1. lemma. Minden pozitív egész n -re $|f(nx) - nf(x)| < nc$.

Bizonyítás. Az n -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ -re az állítás igaz. Ha $(n-1)$ -re igaz az állítás ($n \geq 2$), akkor

$$|f((n-1)x) - (n-1)f(x)| < (n-1)c,$$

és az f -re vonatkozó feltételek szerint

$$|f(nx) - f((n-1)x) - f(x)| < c,$$

így a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával ezek összeadásából kapjuk, hogy $|f(nx) - nf(x)| < nc$, vagyis az állítás n -re is igaz.

Legyen $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, ha $x > 0$. Megmutatjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ határérték létezik.

2. lemma. Ha $q \in Q$, $q \geq 1$ és $x > 0$, akkor $|g(qx) - g(x)| < \frac{2c}{x}$.

Bizonyítás. Legyen $q = \frac{u}{v}$, ahol u, v pozitív egészek és $u \geq v$. Az 1. lemmát alkalmazva kapjuk, hogy $|f(ux) - uf(x)| < uc$ és $|f(v \cdot (qx)) - vf(qx)| < vc$. Az utóbbiból $|f(ux) - vf(qx)| < vc$ következik. A háromszög-egyenlőtlenség szerint ekkor $|vf(qx) - uf(x)| < (u+v)c \leq 2uc$. Mindkét oldalt osztjuk x -szel:

$$\left| \frac{v}{u} \frac{f(qx)}{x} - \frac{f(x)}{x} \right| < \frac{2c}{x} \Rightarrow |g(qx) - g(x)| < \frac{2c}{x}.$$

Vizsgáljuk a $g(1), g(2), g(3), \dots$ sorozatot. Legyen $\varepsilon > 0$ -ra $K = \frac{2c}{\varepsilon}$. Ha m, n egészek, $m, n > K$ és pl. ha $m \geq n$, akkor a 2. lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$|g(m) - g(n)| = \left| g\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) - g(n) \right| < \frac{2c}{K} = \varepsilon,$$

így a Cauchy-kritérium szerint a $\{g(i)\}_{i=1}^{\infty}$ sorozat konvergens. Legyen a határértéke h .

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény sehol sem vesz fel pozitív értéket. Legyen $A = -f(0) \geq 0$, ekkor $x > 0$ -ra $-A \leq f(x) \leq 0$, így

$$|g(x)| = \frac{-f(x)}{x} \leq \frac{A}{x},$$

vagyis ha $\varepsilon > 0$ -ra $x > \frac{A}{\varepsilon}$, akkor $|g(x)| \leq \varepsilon$, tehát $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Ha előbbi feltevésünk nem helyes, azaz $\exists a: f(a) > 0$, akkor minden $x > a$ -ra $f(x) > 0$. Legyen $b = \max(a+1, 0)$. Ha $x > b$ és $n = [x]$, akkor $n, n+1 > a$, így

$$\frac{f(n)}{n+1} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(n+1)}{n},$$

felhasználva, hogy f monoton nő. Ebből $x > b$ -re

$$\frac{n}{n+1}g(n) \leq g(x) \leq \frac{n+1}{n}g(n+1)$$

következik.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(n+1) = h,$$

így a bal és a jobb oldal is h -hoz tart. Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz találhatók olyan K_1, K_2 pozitív számok, melyekre $n \geq K_1$ esetén

$$\left| \frac{n}{n+1}g(n) - h \right| < \varepsilon$$

és $n \geq K_2$ esetén

$$\left| \frac{n+1}{n}g(n+1) - h \right| < \varepsilon.$$

Ekkor $K = \max(b, K_1 + 1, K_2 + 1)$ -re $x > K$ esetén $n \geq K_1$, $n \geq K_2$ és $x > b$, így $|g(x) - h| < \varepsilon$. Ez pedig azt jelenti, hogy a $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ határérték létezik és értéke h .

Minden esetben azt kaptuk, hogy a $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ határérték létezik, legyen értéke k . Tegyük fel indirekten, hogy az $f(x) - kx$ függvény a $(0, \infty)$ intervallumon nem korlátos. Ekkor van olyan $s > 0$, melyre $|f(s) - ks| > 2c$. Az 1. lemma szerint minden pozitív m egészre $|f(ms) - mf(s)| < mc$, továbbá az előbbiekből $|mf(s) - mks| > 2mc$, így

$$|f(ms) - mks| > 2mc - mc = mc \Rightarrow \left| \frac{f(ms)}{ms} - k \right| > \frac{c}{s} \Rightarrow |g(ms) - k| > \frac{c}{s}.$$

Tehát a $\{g(ms)\}_{m=1}^{\infty}$ sorozat biztosan nem tart k -hoz, holott $\lim_{m \rightarrow \infty} ms = \infty$. Ez ellentmond $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = k$ -nak, így az $f(x) - kx$ függvény a $(0, \infty)$ intervallumon korlátos, azaz van olyan pozitív M , melyre $|f(x) - kx| < M$, ha $x > 0$. Ha $x < 0$, akkor a feltételek alapján

$$\begin{aligned} |f(x) + f(-x) - f(0)| < c &\Rightarrow |f(x) + f(-x)| < c + |f(0)| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(x) - kx + (f(-x) - k(-x))| < c + |f(0)| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(x) - kx| < c + |f(0)| + M = N. \end{aligned}$$

Mivel $N > |f(0)|$ és $N > M$, azért tetszőleges valós x -re $|f(x) - kx| < N$, tehát az $f(x) - kx$ függvény valóban korlátos.

II. megoldás. Legyen $n > 1$ pozitív egész. Indukcióval könnyen bizonyítható, hogy

$$nf(x) - (n-1)c_1 \leq f(nx) \leq nf(x) + (n-1)c_2.$$

Speciálisan $x = 1$ -re alkalmazva:

$$f(1) - c_1 < f(1) - \frac{n-1}{n}c_1 \leq \frac{f(n)}{n} \leq f(1) + \frac{n-1}{n}c_2 < f(1) + c_2.$$

Tehát $\frac{f(n)}{n}$ korlátos sorozat, így létezik konvergens részsorozata: $\frac{f(n_k)}{n_k} \rightarrow t_1$. Tegyük fel, hogy $\frac{f(s_k)}{s_k} \rightarrow t_2$ szintén konvergens részsorozat. Legyen $t_1 > t_2$. Ekkor létezik ε és n_0 , melyekre $t_1 - \varepsilon - \frac{c_1}{n_0} > t_2 + \varepsilon + \frac{c_2}{n_0}$. Mivel $\frac{f(n_k)}{n_k} \rightarrow t_1$, így létezik $N_1(\varepsilon)$, hogy $N_1(\varepsilon) < n_k$ esetén $\frac{f(n_k)}{n_k} > t_1 - \varepsilon$, hasonlóan létezik $N_2(\varepsilon)$, hogy $N_2(\varepsilon) < s_k$ esetén $\frac{f(s_k)}{s_k} < t_2 + \varepsilon$. Mivel

$$nf(k) - (n-1)c_1 \leq f(nk) \leq nf(k) + (n-1)c_2,$$

azért

$$\frac{f(k)}{k} - \frac{c_1}{k} \leq \frac{f(kn)}{kn} \leq \frac{f(k)}{k} + \frac{c_2}{k}.$$

Legyen $n_k, s_k \geq \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), n_0)$, ekkor

$$t_1 - \varepsilon - \frac{c_1}{n_0} \leq \frac{f(n_k)}{n_k} - \frac{c_1}{n_k} < \frac{f(s_k n_k)}{s_k n_k} < \frac{f(s_k)}{s_k} + \frac{c_2}{s_k} \leq t_2 + \varepsilon + \frac{c_2}{n_0}$$

Tehát ellentmondásra jutottunk, vagyis pontosan egy konvergens részsorozat választható ki, így $\frac{f(n)}{n}$ konvergens. (Ha $\exists \varepsilon \forall N \exists n \geq N \left| \frac{f(n)}{n} - t_1 \right| > \varepsilon$ akkor az ilyenek sorozatából kiválasztható a korlátosság miatt konvergens részsorozat, amelynek nem t_1 a határértéke.)

Feltehetjük, hogy a függvény monoton nő, különben $-f$ -re térünk át. Ha $f(x) < 0$ minden x -re, akkor $x > 0$ esetén $f(0) \leq f(x) < 0$ miatt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Ha $f(x_0) > 0$, akkor a nála nagyobb n egészekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek. Ha $n < x < n+1$, akkor

$$\frac{n}{n+1} \frac{f(n)}{n} < \frac{f(x)}{x} < \frac{n+1}{n} \frac{f(n+1)}{n+1}.$$

Adott ε -ra legyen n olyan nagy, hogy $\frac{t_1}{n} < \varepsilon$ és $\left| \frac{f(n)}{n} - t_1 \right| < \varepsilon$, ekkor

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{n}{n+1}(t_1 - \varepsilon) > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)t_1 - \varepsilon > t_1 - 2\varepsilon$$

és $\frac{f(x)}{x} < \frac{n+1}{n}(t_1 + \varepsilon) < t_1 + 3\varepsilon$. Tehát létezik $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = t_1$. Másrészt

$$f(x) + f(-x) - c_1 \leq f(0) \leq f(x) + f(-x) + c_2,$$

így

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{c_1 + f(0)}{x} \leq \frac{f(-x)}{-x} \leq \frac{f(x)}{x} + \frac{c_2 + f(0)}{x},$$

azaz $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = t_1$. Az első esetben $t_1 = 0$.

Legyen $g(x) = f(x) - t_1 x$, ekkor

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 0 \quad \text{és} \quad g(x) + g(y) - c_1 \leq g(x+y) \leq g(x) + g(y) + c_2.$$

A feladat feltételeiből következik, hogy $-c_2 < f(0) = g(0) < c_1$. Ha létezik a , hogy $g(a) > c_1$, akkor $g(x) + (g(a) - c_1) \leq g(x+a)$ miatt

$$n(g(a) - c_1) < g(na), \quad \text{így} \quad \frac{g(a) - c_1}{|a|} < \frac{g(na)}{n|a|},$$

azaz $\frac{g(na)}{na}$ nem tart 0-hoz. Hasonlóan ha létezik b , hogy $g(b) < -c_2$, akkor

$$g(x) + g(b) + c_2 \geq g(x+b) \quad \text{miatt} \quad n(g(b) + c_2) > g(nb),$$

azaz most $\frac{g(nb)}{nb}$ nem tart 0-hoz. Tehát $g(x)$ valóban korlátos, ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Megjegyzés. Egy a_n sorozatot konvergensnek mondunk, ha van olyan a szám, hogy minden pozitív ε esetén van egy N küszöbindex, hogy ha $n \geq N$ akkor $|a_n - a| < \varepsilon$. Kevésbé formalizáltan ez azt jelenti, hogy a sorozat tagjai egyre kisebb környezetében vannak az a határértéknek, amint az indexük elég nagy. A második megoldás azt használta, hogy ha a sorozat minden tagja két előre meghatározott korlát között van, akkor a sorozatnak van konvergens részsorozata, de persze sem ez a részsorozat, sem a határérték nem egyértelmű: $a_n = (-1)^n$ esetén a páros n -ek alkotta sorozat 1-hez, a páratlan n -k alkotta sorozat -1 -hez tart.

Ha megsejtjük a határértéket, akkor általában könnyű bizonyítani, hogy a sorozatnak valóban az a határértéke. Gyakran azonban nem áll rendelkezésre ez a határérték, ilyenkor más módszerrel kell bizonyítanunk a sorozat konvergenciáját. Erre sok ekvivalens feltétel ismeretes, ezek közül az úgynevezett Cauchy-kritérium ellenőrizhető a legkönnyebben. Ez azt mondja ki, hogy ha a sorozat tagjai egyre közelebb vannak egymáshoz, akkor a sorozat konvergens, kicsit pontosabban: ha minden pozitív ε -hoz létezik N küszöbindex, hogy ha $m, n > N$ akkor $|a_m - a_n| < \varepsilon$, ekkor a sorozat konvergens. Könnyen látható, hogy a konvergens sorozatokra ez teljesül: ha valahonnan kezdve minden szám legfeljebb ε távolságra van a határértéktől, akkor egymástól legfeljebb 2ε távolságra vannak. Vigyázat: a Cauchy-kritériumnál nem elég ellenőrizni, hogy a szomszédos számok távolsága kicsi-e: ha

$$a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \quad \text{akkor} \quad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}$$

bármilyen kicsi elég nagy n -re, de a_n nem konvergens, nem is korlátos. A konvergens sorozatok korlátosak.