

**I. megoldás.**  $\sin \gamma \neq 0$  (mivel egy háromszög szögéről van szó), ezért oszthatunk  $\sin \gamma$ -val:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \cos \alpha + \cos \beta.$$

A szinusz-tétel alapján kapjuk, hogy

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \cos \alpha + \cos \beta.$$

Írjuk fel a koszinusz-tételt  $a$ -ra és  $b$ -re, majd fejezzük ki a  $\cos \alpha$  és  $\cos \beta$  értékét. Ezeket beírva a következőt kapjuk:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Szorozzunk  $2abc$ -vel, és rendezzük:

$$2ab(a+b) = ab^2 + ac^2 - a^3 + a^2b + bc^2 - b^3,$$

$$a^3 + b^3 + ab(a+b) = ac^2 + bc^2,$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) + ab(a+b) = c^2(a+b).$$

Oszthatunk  $(a+b)$ -vel, és kapjuk, hogy  $a^2 + b^2 = c^2$ .

A Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű:  $\gamma = 90^\circ$ .

**II. megoldás.** Írjunk  $\gamma$  helyére  $(180^\circ - \alpha - \beta)$ -t:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= (\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \sin (180^\circ - \alpha - \beta) = (\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \sin (\alpha + \beta) = \\ &= (\cos \alpha + \cos \beta)(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \cos \beta \sin \beta + \cos^2 \alpha \sin \beta + \cos^2 \beta \sin \alpha. \end{aligned}$$

Ezt rendezhetjük a következő alakra is:

$$(\sin \alpha + \sin \beta)(1 - \cos \alpha \cos \beta) = \cos^2 \alpha \sin \beta + \cos^2 \beta \sin \alpha,$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta)(1 - \cos \alpha \cos \beta) = \sin \beta - \sin^2 \alpha \sin \beta + \sin \alpha - \sin^2 \beta \sin \alpha,$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta)(1 - \cos \alpha \cos \beta) = (\sin \alpha + \sin \beta)(1 - \sin \alpha \sin \beta),$$

azaz:

$$(\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) = 0.$$

1. eset:  $\sin \alpha + \sin \beta = 0$ . Ez nem lehet, mert  $\alpha$  és  $\beta$  háromszög szögei.

2. eset:  $\sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta$ .

Ha  $\cos \alpha$  vagy  $\cos \beta$  egyenlő lenne 0-val, akkor  $\sin \alpha$  és  $\sin \beta$  közül legalább az egyiknek is 0-val kellene egyenlőnek lenni, de ez nem lehet.

Ha  $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$ , akkor így írható az egyenlet:  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$ .

Számoljuk ki  $\operatorname{tg} \gamma$ -t:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha - \beta) = -\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = -\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Mivel  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$ ,  $\operatorname{tg} \gamma$  nincs értelmezve. Ez most azt jelenti, hogy  $\gamma = 90^\circ$ , vagyis a háromszög derékszögű.