

Megoldás. Vizsgáljuk azt, hogy hányféle lehet két négyjegyű szám szorzata. Ha két különböző számot szorzunk össze, legfeljebb $\binom{9000}{2}$ különböző eredményt kaphatunk, míg ha két egyformát, akkor további 9000-et. Összesen legfeljebb a kettő összegét, 40 504 500-at. Viszont összesen 90 000 000 nyolcjegyű szám van, azaz a felénél kevesebb szám állhat elő két négyjegyű szorzataként. Ezért a nem felbonthatók halmaza áll több elemből. Valójában persze 40 504 500-nál kevesebb nyolcjegyű szám állítható elő ilyen alakban, hiszen két négyjegyű szám szorzata lehet hétjegyű is, illetve bizonyos számok többféleképpen is előállíthatók.

Megjegyzések. Sokan külön vizsgálták azokat a szorzatokat, ahol 3162-nél nagyobbak a tényezők (hiszen 3162 éppen $\sqrt{10^7}$ egész része), és ennek alapján élesebb becsléseket kaptak. A bizonyításból látható, hogy a megoldáshoz már a durvább becslés is elegendő.

Sok volt a 3 pontos dolgozat. A versenyzők ilyenkor általában rájöttek a bizonyítás ötletére, azaz hogy a négyjegyűek szorzatait vizsgálva következtessenek arra, hogy hány nyolcjegyű szám állítható elő, de pontatlanul számolták össze az így adódó lehetőségeket. Gyakori hiba volt, hogy kimaradtak a négyzetszámok, mások az összes lehetséges szorzatok számát $\frac{9000^2}{2}$ -vel becsülték (9000 négyjegyű szám van, kettőt 9000²-féleképpen szorozhatunk össze, de mindent kétszer számolunk), pedig a négyzetszámokat itt csak egyszer számoljuk.

Komáromy Dani (Budapest, Berzsényi D. Gimn., 11. évf.) a feladat általánosítását oldotta meg. Eszerint ha a tízes számrendszerben felírt $2n$ -jegyű számokat felosztjuk úgy, hogy az egyikbe kerülnek azok a számok, amelyek felírhatók két n -jegyű szorzataként, a másikba pedig azok, amelyek nem, akkor az előbbi halmazba kerül több elem. A bizonyítás hasonló módon történhet, mint a speciális esetben.