

Megoldás. Ha $k > n$, akkor $\frac{S_n - S_k}{n - k} = \frac{S_k - S_n}{k - n}$, tehát megkötés nélkül feltételezhetjük, hogy $n > k$.

Legyen $k = 1$. Ekkor

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{S_n - S_1}{n-1}.$$

Bebizonyítjuk, hogy már abból is következik, hogy az (a_n) számtani sorozat, ha ez az egyenlőség minden n -re fennáll. Helyettesítsük be $S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ -t:

$$(n-1)(a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}) = (n+1)(a_2 + \dots + a_n),$$

$$(n-1)(a_1 + a_{n+1}) = 2(a_2 + \dots + a_n).$$

Ha $n = 2$, akkor $a_1 + a_3 = 2a_2$, azaz az első 3 tag számtani sorozatot alkot.

Tegyük fel, hogy az első k tag számtani sorozatot alkot, azaz

$$a_i = a_1 + (i-1)d, \quad \text{ha} \quad 1 \leq i \leq k.$$

Bizonyítjuk, hogy ekkor $a_{k+1} = a_1 + kd$:

$$(k-1)(a_1 + a_{k+1}) = 2(a_2 + \dots + a_k),$$

használhatjuk az összegképletet, mivel $a_2, a_3, \dots, a_k$ számtani sorozat.

$$(k-1)(a_1 + a_{k+1}) = 2 \left(\frac{a_1 + d + a_1 + (k-1)d}{2} \right) (k-1),$$

$$a_{k+1} = a_1 + kd.$$

Ezzel bizonyítottuk az indukciós állítást: ha a feltétel teljesül $k = 1$ -re, akkor a tagok számtani sorozatot alkotnak.

Most belátjuk, hogy ha (a_n) számtani sorozat, akkor mindig teljesül, hogy

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+k}}{n+k} = \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n}{n-k}.$$

Felírva az összegképletet:

$$\frac{a_1 + a_1 + (n+k-1)d}{2(n+k)}(n+k) = \frac{a_1 + kd + a_1 + (n-1)d}{2(n-k)}(n-k),$$

$$\frac{2a_1 + nd + kd - d}{2} = \frac{2a_1 + kd + nd - d}{2}.$$

Ezzel bizonyítottuk a feladat állítását.