

Megoldás. Használjuk fel, hogy $x_1 + x_2 = 2004$, így a rekurzió az alábbi formában írható:

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} - x_1 - x_2}{x_n}.$$

Írjuk fel a sorozat első néhány tagját:

$$1001; \quad 1003; \quad x_3 = \frac{x_2 - x_1 - x_2}{x_1} = -1; \quad x_4 = \frac{x_3 - x_1 - x_2}{x_2} = \frac{-1 - x_1 - x_2}{x_2};$$

$$x_5 = \frac{x_4 - x_1 - x_2}{x_3} = -x_4 + x_1 + x_2;$$

$$x_6 = \frac{x_5 - x_1 - x_2}{x_4} = \frac{-x_4 + x_1 + x_2 - x_1 - x_2}{x_4} = -1; \quad \dots$$

Vegyük észre, hogy $x_4 + x_5 = x_1 + x_2 = 2004$ és $x_6 = x_3 = -1$.

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{3n+1} + x_{3n+2} = 2004$ és $x_{3n+3} = -1$. Láttuk, hogy ezek $n = 1$ -re és 2 -re fennállnak.

Tegyük fel, hogy $(k-1)$ -ig igaz az állítás: $x_{3k-2} + x_{3k-1} = 2004$ és $x_{3k} = -1$. Belátjuk k -ra.

A rekurzió és az indukciós feltevés alapján

$$x_{3k+1} = \frac{x_{3k} - x_{3k-1} - x_{3k-2}}{x_{3k-1}} = \frac{-1 - x_{3k-1} - x_{3k-2}}{x_{3k-1}};$$

$$x_{3k+2} = \frac{x_{3k+1} - x_{3k-1} - x_{3k-2}}{x_{3k}} = -x_{3k+1} + x_{3k-1} + x_{3k-2}.$$

Ebből pedig $x_{3k+1} + x_{3k+2} = x_{3k+1} - x_{3k+1} + x_{3k-1} + x_{3k-2} = 2004$ az indukciós feltevés miatt. Továbbá (ezt felhasználva)

$$x_{3k+3} = \frac{x_{3k+2} - x_{3k+2} - x_{3k+1}}{x_{3k+1}} = -1.$$

Ebből következik, hogy a sorozat első 2004 tagját hármasával csoportosítva a számok összege minden egyes csoportban 2003.

Mivel $2004 = 3 \cdot 668$, az első 2004 tag 668 ilyen elemhármashból áll, így a keresett összeg $2003 \cdot 668 = 1\,338\,004$.