

Megoldás. Írjuk fel a $(3 + \sqrt{7})^{2004} + (3 - \sqrt{7})^{2004}$ összeget a binomiális tétel felhasználásával:

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{7})^{2004} + (3 - \sqrt{7})^{2004} &= \\ &= \binom{2004}{0} \cdot 3^{2004} + \binom{2004}{1} \cdot 3^{2003} \cdot \sqrt{7} + \binom{2004}{2} \cdot 3^{2002} \cdot \sqrt{7}^2 + \dots + \\ &+ \binom{2004}{0} \cdot 3^{2004} - \binom{2004}{1} \cdot 3^{2003} \cdot \sqrt{7} + \binom{2004}{2} \cdot 3^{2002} \cdot \sqrt{7}^2 + \dots \end{aligned}$$

Látható, hogy azok a tagok, amelyekben $\sqrt{7}$ páratlan hatványon szerepel, kiesnek, mert ellentétes előjellel szerepelnek a két kifejezésben. A páros kitevőn szereplő hatványok pedig egészek.

$(3 + \sqrt{7})^{2004} + (3 - \sqrt{7})^{2004}$ tehát egész szám.

$3 - \sqrt{7} < 1$, ezért $(3 - \sqrt{7})^{2004} < 1$, tehát $(3 + \sqrt{7})^{2004}$ tizedesvessző előtti számjegye a $(3 + \sqrt{7})^{2004} + (3 - \sqrt{7})^{2004}$ szám egyes helyiértékén álló számjegynél 1-gyel kisebb. (Ha az egész szám 0-ra végződik, akkor persze 9.)

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{7})^{2004} + (3 - \sqrt{7})^{2004} &= \left((3 + \sqrt{7})^3\right)^{668} + \left((3 - \sqrt{7})^3\right)^{668} = \\ &= (27 + 27 \cdot \sqrt{7} + 9 \cdot 7 + 7\sqrt{7})^{668} + (27 - 27 \cdot \sqrt{7} + 9 \cdot 7 - 7\sqrt{7})^{668} = \\ &= (90 + 34\sqrt{7})^{668} + (90 - 34\sqrt{7})^{668}. \end{aligned}$$

Ahogy az az előzőekben már láttuk, a $\sqrt{7}$ -et tartalmazó tagok a két összegben ellentétes előjellel szerepelnek, így ki fognak esni, a páros kitevőjű tagok pedig kétszer szerepelnek.

$$\begin{aligned} (90 + 34\sqrt{7})^{668} + (90 - 34\sqrt{7})^{668} &= \\ &= \sum_{n=0}^{668} \binom{668}{n} 90^{668-n} \cdot 34^n \cdot \sqrt{7}^n + \sum_{n=0}^{668} (-1)^n \cdot \binom{668}{n} 90^{668-n} \cdot 34^n \cdot \sqrt{7}^n = \\ &= \sum_{k=0}^{334} 2 \cdot \binom{668}{2k} 90^{668-2k} \cdot 34^{2k} \cdot 7^k = 2 \cdot \sum_{k=0}^{334} \binom{668}{2k} 90^{668-2k} \cdot 34^{2k} \cdot 7^k. \end{aligned}$$

Az összegben szereplő tagok – a $k = 334$ kivételével – a 90-et valódi szorzótényezőként tartalmazzák, ezért 0-ra végződnek. $k = 334$ esetén az összeadandó

$$2 \cdot \binom{668}{668} \cdot 90^0 \cdot 34^{668} \cdot 7^{334}.$$

$2 \cdot 34^{668} \cdot 7^{334}$ utolsó számjegyre vagyunk kíváncsiak.

34 minden párosadik hatványa 6-ra (páratlanadik hatványa 4-re) végződik. 7 hatványai rendre 7, 9, 3, 1 végződésűek. A 334 néggyel osztva 2 maradékot ad, így 7^{334} utolsó számjegye 9. Eszerint az utolsó tag utolsó számjegye $2 \cdot 6 \cdot 9 = 108$ utolsó számjeggyel, 8-cal egyenlő.

A $(3 + \sqrt{7})^{2004}$ számban a tizedesvessző előtt 7 áll.