

Megoldás. Legyen $p(x)$ n -edfokú polinom, amelyre teljesül a feladat feltétele.

Ha $n = 0$, akkor $p(x) \equiv c$ és $p(x+1) \equiv c$. A feltétel szerint

$$c \cdot c = c, \quad \text{ahonnan} \quad c = 0 \quad \text{vagy} \quad c = 1.$$

Tehát $p(x) \equiv 0$, vagy $p(x) \equiv 1$.

Ha $n = 1$, akkor $p(x) = ax + b$, ekkor $p(x+1) = ax + a + b$, ahol $a \neq 0$. Behelyettesítve

$$(ax + b)(ax + a + b) = a(x + ax + b) + b,$$

$$a^2x^2 + abx + a^2x + ab + abx + b^2 = ax + a^2x + ab + b,$$

$$a^2x^2 + (a^2 + 2ab)x + b^2 = (a^2 + a)x + b.$$

A két polinom csak $a = 0$ esetén egyezhetne meg, de $a \neq 0$. Tehát $p(x)$ nem lehet elsőfokú.

Ha $n > 1$, akkor $p(x)$ n -edfokú, $p(x+1)$ n -edfokú, $p(x) \cdot p(x+1)$ $2n$ -edfokú. $x + p(x)$ n -edfokú, $p(x + p(x))$ n^2 -edfokú. Mivel a két polinom egyenlő, azért $n^2 = 2n$, tehát ha $n > 1$, akkor $n = 2$, a polinom másodfokú.

Legyen $p(x) = ax^2 + bx + c$, ahol $a \neq 0$. Nézzük, mit jelent a feltétel:

$$\begin{aligned} p(x + p(x)) &= a(x + p(x))^2 + b(x + p(x)) + c = \\ &= ax^2 + 2axp(x) + ap^2(x) + bx + bp(x) + c. \end{aligned}$$

Ha ez azonos a $p(x) \cdot p(x+1)$ polinommal, akkor

$$p(x) \cdot [a(x+1)^2 + b(x+1) + c - 2ax - ap(x) - b] \equiv ax^2 + bx + c \equiv p(x),$$

azaz $p(x) \cdot [ax^2 + 2ax + a + bx + b + c - 2ax - ap(x) - b - 1]$ az azonosan nulla polinom. Mivel $p(x)$ másodfokú, azért a második tényező azonosan nulla:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c + a - ap(x) - 1}_{p(x)} = 0.$$

Szorozattá alakítva $(1 - a)(p(x) - 1)$ azonosan nulla. Mivel $p(x)$ másodfokú, ez csak úgy lehetséges, ha $a = 1$. Ekkor $p(x) = x^2 + bx + c$, ahol b és c tetszőleges valós számok. Mivel lépéseink megfordíthatók, azért ebben az esetben teljesül az egyenlőség.

Tehát a feladat feltételeinek megfelelő polinomok: $p(x) = 0$, $p(x) = 1$ és $p(x) = x^2 + bx + c$.