

I. megoldás. Tudjuk, hogy a kocka köré írt gömb sugarának hossza egyenlő a kocka testátlója felének a hosszával, a beírt gömb sugara pedig egyenlő a kocka élhosszának a felével. Jelölje a a K_1 kocka élet, körülírt gömbjének sugarát r_1 , felszínét F_1 ; a kockába írt gömb térfogatát V_1 .

$$r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad F_1 = 4 \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 \pi, \quad V_1 = \frac{4 \left(\frac{a}{2} \right)^3 \pi}{3}.$$

A K_2 kocka éle b , beírt gömbjének sugara r_2 , felszíne F_2 , körülírt gömbjének térfogata V_2 .

$$r_2 = \frac{b}{2}, \quad F_2 = 4 \left(\frac{b}{2} \right)^2 \pi, \quad V_2 = \frac{4 \left(\frac{b\sqrt{3}}{2} \right)^3 \pi}{3}.$$

Tudjuk, hogy $F_1 = 2F_2$, azaz $4\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 2 \cdot 4\pi \left(\frac{b}{2} \right)^2$. Innen egyszerűsítés és rendezés után kapjuk, hogy $a = b\sqrt{\frac{2}{3}}$.

A keresett térfogatok aránya:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4 \left(\frac{a}{2} \right)^3 \pi}{3}}{\frac{4 \left(\frac{b\sqrt{3}}{2} \right)^3 \pi}{3}}.$$

Végezzük el az egyszerűsítéseket és helyettesítsük be az $a = b\sqrt{\frac{2}{3}}$ -ot, kapjuk, hogy

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^3}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2\sqrt{2}}{27} \approx 0,1048.$$

II. megoldás. Jelölje $f(K_i)$ és $K_i(f)$ az i -edik kocka körülírt és beírt gömbjének a felszínét ($i = 1, 2$), $v(K_i)$ és $K_i(v)$ pedig ezeknek a gömböknek a térfogatát.

Egy kocka beírt és körülírt gömbje hasonló, a hasonlóság aránya az átmérők, vagyis a kocka élének és testátlójának az aránya, $1 : \sqrt{3}$. Hasonló testek felszínének, illetve térfogatának az aránya a hasonlóság arányának a négyzete, illetve a köbe; így $\frac{f(K_i)}{K_i(f)} = (\sqrt{3})^2 = 3$ és $\frac{v(K_i)}{K_i(v)} = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$.

A feltétel szerint $\frac{f(K_1)}{K_2(f)} = 2$. Innen

$$\frac{f(K_1)}{f(K_2)} = \frac{f(K_1)}{K_2(f)} \cdot \frac{K_2(f)}{f(K_2)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{2}{3},$$

a K_1 és a K_2 kockák körülírt gömbjei felszínének az aránya. Ez a kockák felszínének az aránya is, a kockák hasonlósága arányának a négyzete. Ennek az arálynak a köbe a két kocka – és így a két beírt, illetve körülírt gömb térfogatának az aránya is.

A feladat kérdésében szereplő arány tehát

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{K_1(v)}{v(K_2)} = \frac{K_1(v)}{K_2(v)} \cdot \frac{K_2(v)}{v(K_2)} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^3 \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{27}.$$