

I. megoldás. A fizetendő és a visszajáró összeg is háromjegyű (nem feltétlenül különböző jegyekből álló) egész szám. Jelölje $\overline{abc}$ a fizetendő összeget. A visszajáró összegben az a, b, c számok valamilyen – az előzőtől különböző – sorrendben fordulnak elő. Ezek a következők lehetnek:

$$a, c, b; \quad b, a, c; \quad b, c, a; \quad c, a, b; \quad \text{és} \quad c, b, a.$$

Vizsgáljuk meg külön-külön ezeket az eseteket.

$$1. \quad \begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \ a \ c \ b \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Ekkor vagy $b + c = 0$ miatt $b = c = 0$ és ekkor $a = 5$, de itt a számok sorrendje nem különböző; vagy $b + c = 10$, de ekkor az 1 maradék miatt a $b + c + 1$ összeg nem végződhetne 0-ra. Ez tehát nem lehetséges.

$$2. \quad \begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \ b \ a \ c \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Innen vagy $c = 0$, ez nem lehetséges, mert akkor $b + a = 10$ és $a + b + 1 = 10$ lenne; vagy $c = 5$ és $b + a + 1 = 10$ miatt $b + a = 9$, a számjegyek összege pedig $9 + 5 = 14$.

$$3. \quad \begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \ b \ c \ a \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Innen $c + a = 10$, $c + b + 1 = 10$, ahonnan $a - b = 1$, és $a + b + 1 = 10$ miatt $a + b = 9$. Az egyenletrendszerből $a = 5$, $c = 5$, $b = 4$, a számjegyösszeg 14.

$$4. \quad \begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \ c \ a \ b \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Az előzőekhez hasonlóan $b + c = 10$, $a + b = 9$, és $a + c = 9$, ahonnan $a = 4$, $b = 5$ és $c = 5$, a számjegyösszeg 14.

$$5. \quad \begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \ c \ b \ a \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Végül a és c nem lehet egyszerre 0, mert akkor nem kaphatnánk háromjegyű számot. Ha viszont $a + c = 10$, akkor $2b + 1 = 10$ nem lehetséges.

Láthatjuk, hogy ha van megoldás, például 365 és 635, akkor a számjegyek összege 14.

II. megoldás. Jelölje a vételárat A , az A számjegyeinek az összegét pedig $S(A)$. A feltétel szerint A és $1000 - A$ ugyanazokból a jegyekből állnak. Először megmutatjuk, hogy ekkor A utolsó jegye nem lehet 0. Ha ez volna a helyzet, akkor az A első két jegyéből álló $\overline{xy} = 10x + y$ kétjegyű számra $100 - \overline{xy}$ is ugyanezekből a jegyekből áll, csak fordított sorrendben. Ez viszont nem lehetséges, hiszen $10x + y + 10y + x = 11(x + y)$ és ez a 11-gyel osztható összeg nem lehet egyenlő 100-zal.

Ha A utolsó jegye nem 0, akkor $S(1000 - A) = 1 + S(999 - A)$. Mivel a $999 - A$ kivonást helyiértékenként átvitel nélkül végezhetjük el, azért $S(999 - A) = 3 \cdot 9 - S(A) = 27 - S(A)$, tehát $S(1000 - A) = 1 + 27 - S(A)$. Mivel A és $1000 - A$ jegyei azonosak, így $S(A) = S(1000 - A) = 28 - S(A)$, azaz $S(A) = 14$.

A feladatban leírt háromjegyű számok jegyeinek összege tehát 14. Ilyen szám létezik, például a 365.

Megjegyzés. Az nem igaz, hogy ha $S(A) = 14$, akkor A a feladat feltételeinek megfelelő háromjegyű szám, például $A = 536$ esetén $1000 - A$ az A jegyeinek átrendezésével kapott számok mindegyikétől különbözik.