Megoldás. *a*) Az $u=1+\sqrt{2}$, $v=-\sqrt{2}$ választással $u+v=1$ racionális.
Páros n esetén u^n irracionális, v^n racionális, tehát az összegük irracionális.
Páratlan n esetén

$$u^n+v^n=\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\left(\sqrt{2}\right)^n=\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-2}\sqrt{2}+\ldots+\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}+\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\right).$$

A második zárójeles kifejezésben egész számok összege és $\sqrt{2}$ hatványainak többszöröse szerepel, $a+b\sqrt{2}$ alakú. Minden együttható pozitív, ezért elég belátni, hogy van olyan tag, amelyben $\sqrt{2}$ együtthatója nem 0. Az $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}$ tagban beszorozva például ezt kapjuk: $\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}+\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$. Itt $\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}$-ben a $\sqrt{2}$ páratlan hatványon szerepel, tehát biztosan nem 0 az együtthatója.

b) Tegyük fel, hogy léteznek ilyen u és v számok.
Nem lehet u és v egyszerre 0, mert akkor $u+v$ nem irracionális.
Nem lehet, hogy u vagy v egyike 0, mert például ha $u=0$, akkor v irracionális, és így $v^3=v\cdot v^2$ miatt vagy v^2, vagy v^3 szintén irracionális lenne, ami ellentmond a feltevésünknek.

$$\left(u^2+v^2\right)^2-\left(u^4+v^4\right)=2u^2v^2,$$

tehát $2u^2v^2$, vagyis u^2v^2 is racionális, mert u^2+v^2 és u^4+v^4 is az.
Ha minden $n\geq 2$ esetén u^n+v^n racionális, akkor speciálisan $n=2$-re, 3-ra és 5-re is az. Írjuk most fel a következő szorzatot:

$$(u^2+v^2)(u^3+v^3)=u^5+v^5+u^2v^2(u+v).$$

Azonos átalakítással ($u\neq 0$, $v\neq 0$):

$$\frac{(u^2+v^2)(u^3+v^3)-(u^5+v^5)}{u^2v^2}=(u+v). \tag{1}$$

Eszerint (1) bal oldalán racionális szám áll, a jobb oldal tehát nem lehet irracionális.