Megoldás. Szorozzuk meg a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalát $n(n-1)$-gyel. Ez az egyenlőtlenség ekvivalens átalakítása, mivel $n>1$. Rendezés után szorzattá alakíthatunk:

$$0 \leq -nx^{n-1} + nx^n - x^n + 1 = (x-1)\big[nx^{n-1} - (1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1})\big].$$

Ha $x \geq 1$, akkor $x-1 \geq 0$, és $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1} \leq x^{n-1}$, ezért

$$(1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1}) \leq n \cdot x^{n-1},$$

így $nx^{n-1} - (1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1}) \geq 0$, azaz ilyenkor

$$0 \leq (x-1)\big[nx^{n-1} - (1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1})\big].$$

Ha $0 < x < 1$, akkor $x-1 < 0$, és $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1} \geq x^{n-1}$, ezért

$$1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1} \geq n \cdot x^{n-1},$$

így $nx^{n-1} - (1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1}) \leq 0$, azaz most is teljesül, hogy

$$0 \leq (x-1)\big[nx^{n-1} - (1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1})\big].$$

Ezzel minden esetben igazoltuk az egyenlőtlenséget.