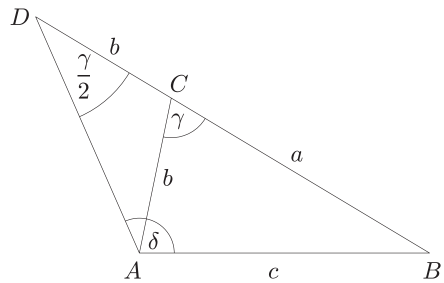
Megoldás. Ha adott a háromszög K kerülete és a c oldala, akkor ezzel adottnak vehető másik két oldalának összege, $a+b$ is. Hosszabbítsuk meg a BC oldalt C-n túl és mérjük fel rá a b-t. Így az ABD háromszöget kapjuk. Az ACD háromszög két oldala b, ezért egyenlő szárú és mivel a szárszög melletti külső szöge γ, azért

$$DAC\sphericalangle = ADC\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}.$$



A szerkesztés menete: Felvesszük a $BD = a+b$ szakaszt és D-ben rámásoljuk a γ szög felét. B köré c sugarú kört szerkesztünk. Ahol metszi a $\frac{\gamma}{2}$ szög másik szárát, ott van az A pont. Az AD szakasz felezőmerőlegese és DB metszéspontja C.

Diszkusszió: A megoldhatóságnak nyilván feltétele, hogy a kerület legyen nagyobb a c oldalnál és $\gamma < 180°$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt szükséges, hogy $a+b>c$ teljesüljön, vagyis a kerület legyen nagyobb a c kétszeresénél.

Az ABD háromszögben adott két oldal és a kisebbikkel szemközti szög. Legyen $DAB\sphericalangle = \delta$. A szinusz-tétel miatt

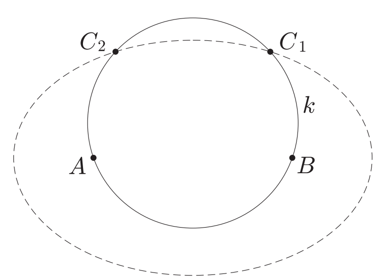
$$\sin\delta = \frac{(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}}{c}.$$

(Itt $(a+b) = K-c$, tehát $\sin\delta$ értéke csak a megadott adatoktól függ.) Ha ez az érték nagyobb, mint 1, akkor nincs megoldás; ha egyenlő 1-gyel, akkor egy megoldás van; és ha kisebb, mint 1, akkor két egybevágó megoldás van (ld. 2. megjegyzés).

Megjegyzések. 1. Ha másképpen indulunk el, akkor egyszerűbb a megoldás szerkezete. A szinusztétel szerint

$$2R = \frac{c}{\sin\gamma},$$

tehát az ABC háromszög k körülírt köre megszerkeszthető. A C csúcs így rajta van a k körön, másfelől $CA+CB=a+b$ miatt az A, B fókuszú, $(a+b)$ nagytengelyű ellipszisen[1]. A kör és az ellipszis metszéspontjai a szimmetrikus elrendezés miatt most egyszerűen megszerkeszthetők.



2. Az ábra szimmetriájának nyilvánvaló következménye, hogy ha van megoldása a feladatnak, akkor az így egyértelműen meghatározott, mivel ABC_1 és ABC_2 tükrösek. A közölt megoldás záróközleménye szerint ebben az esetben „két egybevágó megoldás van".

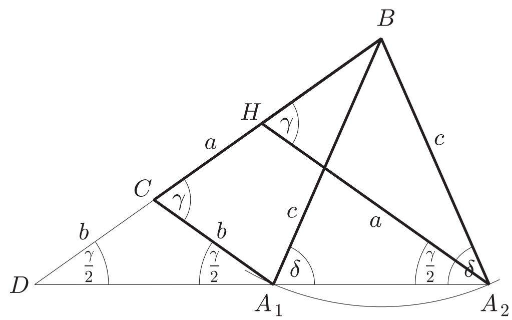
Valóban, a B középpontú, c sugarú kör az A_1 és A_2 pontokban metszi a D-ből induló, a DB-vel $\frac{\gamma}{2}$ szöget bezáró félegyenest. Az *ábra* jelölései szerint legyen $BA_1A_2\sphericalangle = BA_2A_1\sphericalangle = \delta$. Mivel $BDA_2\sphericalangle = HA_2D\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, azért $BHA_2\sphericalangle = \gamma$. Így az A_1BC és az A_2BH háromszögek egy oldala (c) és ezzel szemközti szöge (γ) megegyezik, de még egy szögük egyenlő, mert:

$$DA_1C\sphericalangle + CA_1B\sphericalangle + BA_1A_2\sphericalangle = 180° = BCA_1\sphericalangle + CA_1B\sphericalangle + A_1BC\sphericalangle,$$

$$\frac{\gamma}{2} + \delta = \gamma + A_1BC\sphericalangle,$$

[1] Ld. Kiss György: *Amit jó tudni a kúpszeletekről I–II.,* KöMaL 2004/8. sz., 450. oldal, 2004/9. sz., 514. oldal; illetve honlapunkon (`www.komal.hu`).

amiből $A_1BC\sphericalangle = \delta - \dfrac{\gamma}{2}$. A BA_2H szög is $\delta - \dfrac{\gamma}{2}$-vel egyenlő, ezért $A_1BC\sphericalangle = BA_2H\sphericalangle$.



Az egybevágóság egy másik bizonyítása látható a *borítón:* A DA_1C, DA_2H és az A_1A_2B egyenlő szárú háromszögek alapjainak felezőpontja legyen rendre E, F és G. Ekkor:

$$\overline{DE} = \frac{\overline{DA_1}}{2} \quad \text{és} \quad \overline{FG} = \frac{\overline{DA_1} + \overline{A_1A_2}}{2} - \frac{\overline{A_1A_2}}{2} = \frac{\overline{DA_1}}{2},$$

tehát $DE = FG$. A párhuzamos szelők tételéből következik, hogy $DC = HB = b$. Így $CB = DB - DC = (a+b) - b = a$. Hasonlóan $DH = a$. Tehát a CA_1B és a HBA_2 háromszögek mindhárom oldala megegyezik, ezért a két háromszög egybevágó.