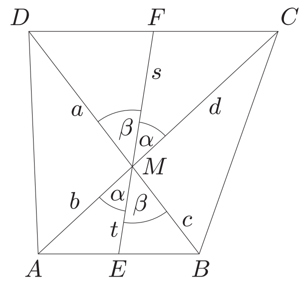


1. megoldás. Legyenek E és F a négyszög szemközti oldalainak felezőpontjai és egyebekben is használjuk az *ábra* jelöléseit. A feltételből következik, hogy a két háromszög súlyvonala egy egyenesbe esik. Ekkor pedig – mivel s súlyvonal – a DFM és a CFM háromszög területe egyenlő:

$$\frac{sa\sin\beta}{2}=\frac{sd\sin\alpha}{2}.$$

Ugyanígy az AME és a BME háromszög területe is egyenlő:

$$\frac{tc\sin\beta}{2}=\frac{tb\sin\alpha}{2}.$$

Innen $a\sin\beta=d\sin\alpha$ és $c\sin\beta=b\sin\alpha$.

Osszuk el a két egyenletet egymással: $\dfrac{a}{c}=\dfrac{d}{b}$. Ebből a párhuzamos szelők tételének megfordítása szerint következik, hogy $AB\parallel CD$, tehát a négyszög trapéz.

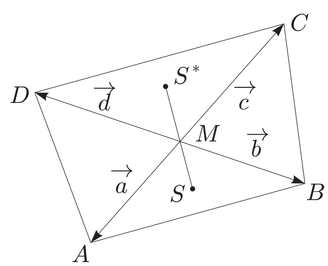
2. megoldás. Jelölje S az ABM, S^* pedig az MCD háromszög súlypontját! Vezessük be a következő vektorokat:

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{MA},\quad \overrightarrow{b}=\overrightarrow{MB},\quad \overrightarrow{c}=\overrightarrow{MC}=\alpha\overrightarrow{a}$$

($\alpha\in R$; $\alpha\neq 0$), mert A, M és C egy egyenesen vannak és

$$\overrightarrow{d}=\overrightarrow{MD}=\beta\overrightarrow{b}$$

($\beta\in R$; $\beta\neq 0$), mert B, M és D egy egyenesen vannak.



Az M-ből a két háromszög súlypontjába mutató helyvektorok:

$$\overrightarrow{MS}=\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{3}\quad\text{és}\quad\overrightarrow{MS^*}=\frac{\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}}{3}=\frac{\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}}{3}.$$

Ha S, M és S^* egy egyenesen vannak, akkor $\overrightarrow{MS^*}=\lambda\cdot\overrightarrow{MS}$, azaz

$$\frac{\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}}{3}=\lambda\cdot\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{3},\quad \alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}=\lambda\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$$

$$\alpha\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{b}-\beta\overrightarrow{b},\quad(\alpha-\lambda)\overrightarrow{a}=(\lambda-\beta)\overrightarrow{b}.$$

Itt $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ nem $\overrightarrow{0}$, és nem párhuzamosak, tehát az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha mindkét együttható 0: $(\alpha-\lambda)=(\lambda-\beta)=0$, ahonnan $\alpha=\beta=\lambda$. Most megmutatjuk, hogy az AB és a DC oldal párhuzamos. Írjuk fel a belőlük képzett vektorokat:

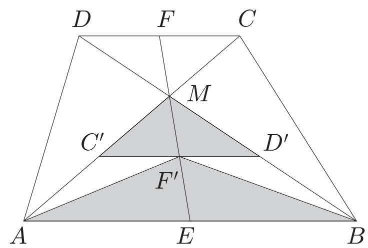
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a},\quad\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}=\alpha\overrightarrow{a}-\beta\overrightarrow{b}=\alpha\overrightarrow{a}-\alpha\overrightarrow{b}=\alpha\big(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\big).$$

A kapott vektorok egyike a másik számszorosa, tehát valóban párhuzamosak, vagyis az $ABCD$ négyszög trapéz.

3. megoldás. Legyen az AB oldal felezőpontja E, a CD oldal felezőpontja F. A feltételből következik, hogy az ME és MF súlyvonalak egy egyenesre esnek. Tükrözzük az MCD háromszöget az M pontra. A tükrözés tulajdonságai miatt $C' \in AM$, $D' \in BM$, $F' \in EM$ és F' felezőpontja $C'D'$-nek, valamint $C'D' \parallel CD$. Mivel MF' súlyvonala az $MC'D'$ háromszögnek, azért

$$T_{C'F'M\triangle} = T_{F'D'M\triangle}.$$

Az $F'E$ súlyvonala az ABF' háromszögnek, ezért $T_{AEF'\triangle} = T_{EBF'\triangle}$, végül ME súlyvonala az ABM háromszögnek, ezért $T_{AEM\triangle} = T_{EBM\triangle}$. Így $T_{AF'C'\triangle} = T_{AEM\triangle} - T_{AEF'\triangle} - T_{C'F'M\triangle} = T_{EBM\triangle} - T_{EBF'\triangle} - T_{F'D'M\triangle} = T_{F'BD'\triangle}$. Mivel $C'F' = F'D'$, $C'F'$ és $F'D'$ egy egyenesre esik, valamint $T_{AF'C'\triangle} = T_{F'BD'\triangle}$, azért A és B egyenlő távol van $C'D'$ egyenesétől, azaz $AB \parallel C'D' \parallel CD$. Tehát az $ABCD$ négyszög trapéz.



Megjegyzés. A fenti megoldás a pontoknak az *ábrán* látható elrendezésére vonatkozik, más elrendezésben a bizonyítás hasonlóan működik. Ezeket a bonyodalmakat a most következő megoldás a vektoriális szorzat felhasználásával hidalja át.

4. megoldás. A két háromszög súlypontja legyen S és S'. A feltétel szerint S, M és S' egy egyenesbe esik, ami akkor és csak akkor teljesül, ha az $\overrightarrow{MS}$ és az $\overrightarrow{MS'}$ vektorok vektoriális szorzata $\overrightarrow{0}$. A továbbiakban használjuk az *ábra* jelöléseit és a vektoriális szorzás tulajdonságait: $\overrightarrow{MS} \times \overrightarrow{MS'} = \overrightarrow{0}$, azaz mivel S és S' súlypont, így

$$\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{3} \times \frac{\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{3} = \overrightarrow{0}, \qquad (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}) = \overrightarrow{0} \iff$$

$$\iff \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{d} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{d} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{d} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b}.$$

(A vektorok sorrendje miatt a szorzatvektorok iránya megegyezik.) A két szorzatvektor tehát akkor és csak akkor egyenlő, ha nagyságukra $ad \sin\varphi = cb \sin\varphi$ teljesül. (φ-vel az átlók hajlásszögét jelöljük.) Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Mivel az ABM és a CDM háromszög két oldalának aránya egyenlő és az ezek által közbezárt szög is egyenlő (φ), így e két háromszög hasonló, ezért a többi szögük nagysága is megegyezik. Ebből pedig következik az AB és a CD oldal párhuzamossága. (Mivel minden lépésünk megfordítható, így az állítás megfordítása is igaz, bár annak helyességét önmagában is lényegesen egyszerűbb belátni.)