

1. megoldás. Legyenek E és F a négyszög szemközti oldalainak felezőpontjai és egyebekben is használjuk az *ábra* jelöléseit. A feltételből következik, hogy a két háromszög súlyvonala egy egyenesbe esik. Ekkor pedig – mivel s súlyvonal – a DFM és a CFM háromszög területe egyenlő:

$$\frac{sa \sin \beta}{2} = \frac{sd \sin \alpha}{2}.$$

Ugyanígy az AME és a BME háromszög területe is egyenlő:

$$\frac{tc \sin \beta}{2} = \frac{tb \sin \alpha}{2}.$$

Innen $a \sin \beta = d \sin \alpha$ és $c \sin \beta = b \sin \alpha$.

Osszuk el a két egyenletet egymással: $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$. Ebből a párhuzamos szelők tételének megfordítása szerint következik, hogy $AB \parallel CD$, tehát a négyszög trapéz.

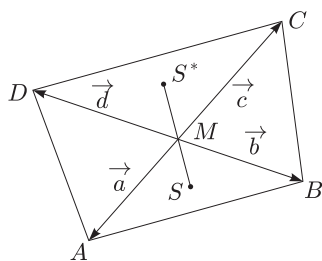
2. megoldás. Jelölje S az ABM , S^* pedig az MCD háromszög súlypontját! Vezessük be a következő vektorokat:

$$\vec{a} = \overrightarrow{MA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{MB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{MC} = \alpha \vec{a}$$

($\alpha \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq 0$), mert A , M és C egy egyenesen vannak és

$$\vec{d} = \overrightarrow{MD} = \beta \vec{b}$$

($\beta \in \mathbb{R}$; $\beta \neq 0$), mert B , M és D egy egyenesen vannak.



Az M -ből a két háromszög súlypontjába mutató helyvektorok:

$$\overrightarrow{MS} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{MS^*} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{3} = \frac{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}}{3}.$$

Ha S , M és S^* egy egyenesen vannak, akkor $\overrightarrow{MS^*} = \lambda \cdot \overrightarrow{MS}$, azaz

$$\begin{aligned} \frac{\vec{c} + \vec{d}}{3} &= \lambda \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}, & \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} &= \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \\ \alpha \vec{a} - \lambda \vec{a} &= \lambda \vec{b} - \beta \vec{b}, & (\alpha - \lambda) \vec{a} &= (\lambda - \beta) \vec{b}. \end{aligned}$$

Itt \vec{a} és \vec{b} nem $\vec{0}$, és nem párhuzamosak, tehát az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha mindkét együttható 0: $(\alpha - \lambda) = (\lambda - \beta) = 0$, ahonnan $\alpha = \beta = \lambda$. Most megmutatjuk, hogy az AB és a DC oldal párhuzamos. Írjuk fel a belőlük képzett vektorokat:

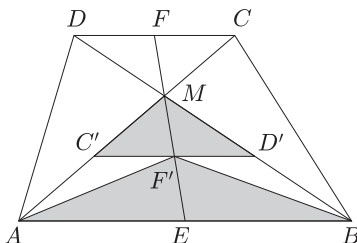
$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d} = \alpha \vec{a} - \beta \vec{b} = \alpha \vec{a} - \alpha \vec{b} = \alpha(\vec{a} - \vec{b}).$$

A kapott vektorok egyike a másik számszorosa, tehát valóban párhuzamosak, vagyis az $ABCD$ négyszög trapéz.

3. megoldás. Legyen az AB oldal felezőpontja E , a CD oldal felezőpontja F . A feltételből következik, hogy az ME és MF súlyvonalak egy egyenesre esnek. Tükrözzük az MCD háromszöget az M pontra. A tükrözés tulajdonságai miatt $C' \in AM$, $D' \in BM$, $F' \in EM$ és F' felezőpontja $C'D'$ -nek, valamint $C'D' \parallel CD$. Mivel MF' súlyvonala az $MC'D'$ háromszögnek, azért

$$T_{C'F'M\Delta} = T_{F'D'M\Delta}.$$

Az $F'E$ súlyvonala az ABF' háromszögnek, ezért $T_{AEF'\Delta} = T_{EBF'\Delta}$, végül ME súlyvonala az ABM háromszögnek, ezért $T_{AEM\Delta} = T_{EBM\Delta}$. Így $T_{AF'C'\Delta} = T_{AEM\Delta} - T_{AEF'\Delta} - T_{C'F'M\Delta} = T_{EBM\Delta} - T_{EBF'\Delta} - T_{F'D'M\Delta} = T_{F'BD'\Delta}$. Mivel $C'F' = F'D'$, $C'F'$ és $F'D'$ egy egyenesre esik, valamint $T_{AF'C'\Delta} = T_{F'BD'\Delta}$, azért A és B egyenlő távol van $C'D'$ egyenesétől, azaz $AB \parallel C'D' \parallel CD$. Tehát az $ABCD$ négyszög trapéz.



Megjegyzés. A fenti megoldás a pontoknak az ábrán látható elrendezésére vonatkozik, más elrendezésben a bizonyítás hasonlóan működik. Ezeket a bonyodalmakat a most következő megoldás a vektoriális szorzat felhasználásával hidalja át.

4. megoldás. A két háromszög súlypontja legyen S és S' . A feltétel szerint S , M és S' egy egyenesbe esik, ami akkor és csak akkor teljesül, ha az \vec{MS} és az \vec{MS}' vektorok vektoriális szorzata $\vec{0}$. A továbbiakban használjuk az *ábra* jelöléseit és a vektoriális szorzás tulajdonságait: $\vec{MS} \times \vec{MS}' = \vec{0}$, azaz mivel S és S' súlypont, így

$$\begin{aligned} \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \times \frac{\vec{c} + \vec{d}}{3} &= \vec{0}, & (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) &= \vec{0} \iff \\ \iff \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d} &= \vec{0} \iff \vec{a} \times \vec{d} &= \vec{c} \times \vec{b}. \end{aligned}$$

(A vektorok sorrendje miatt a szorzatvektorok iránya megegyezik.) A két szorzatvektor tehát akkor és csak akkor egyenlő, ha nagyságukra $ad \sin \varphi = cb \sin \varphi$ teljesül. (φ -vel az átlók hajlásszögét jelöljük.) Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Mivel az ABM és a CDM háromszög két oldalának aránya egyenlő és az ezek által közbezárt szög is egyenlő (φ), így e két háromszög hasonló, ezért a többi szögük nagysága is megegyezik. Ebből pedig következik az AB és a CD oldal párhuzamossága. (Mivel minden lépésünk megfordítható, így az állítás megfordítása is igaz, bár annak helyességét önmagában is lényegesen egyszerűbb belátni.)

