

I. megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy egy rögzített d szám hányszor lép fel $(i; j)$ -ként a feladatbeli összegben! Világos, hogy ha $(i; j) = d$, akkor $\frac{i}{d}$ és $\frac{j}{d}$ relatív prímekek, továbbá mindkettő az $\left[1; \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right]$ intervallumba esik, ahol $\lfloor n \rfloor$ az n alsó egészrészét jelöli.

Másfelől, ha $i', j' \in \left[1; \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right]$ relatív prímekek, akkor $i := i' \cdot d$, ill. $j := j' \cdot d$ esetén $(i; j) = d$ és $i, j \in [1; n]$. A feladatbeli egyenlőtlenség bal oldalán álló mennyiséget $f(n)$ -nel jelölve, a fenti gondolatmenet formálisan az alábbi összeg átrendezése:

$$(1) \quad f(n) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i; j) = \sum_{d=1}^n \sum_{\substack{(i; j) = d, \\ 1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq n}} d = \sum_{d=1}^n \sum_{\substack{(i; j) = 1, \\ 1 \leq i \leq \frac{n}{d}, \\ 1 \leq j \leq \frac{n}{d}}} d = \sum_{d=1}^n d \cdot g\left(\frac{n}{d}\right),$$

ahol $g(x)$ az 1 és x közé eső számokból alkotható relatív prím számpárok száma. A továbbiakban $g(x)$ értékét fogjuk megbecsülni, pontosabban igazoljuk, hogy

$$(2) \quad g(x) \geq \frac{x^2}{100}.$$

Mivel az $(1; 1)$ számpár megfelelő, ezért $x \leq 10$ esetén (2) triviálisan teljesül. A becslés úgy adódik, hogy az összes számpárok számából minden d -re kivonjuk azon számpárok számát, melyeknek d közös osztója. Azaz,

$$\begin{aligned} g(x) &\geq \lfloor x \rfloor^2 - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor^2 - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor^2 - \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor^2 - \dots > \left(\frac{9x}{10}\right)^2 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} - \dots > \\ &> x^2 \left(\frac{81}{100} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} \dots \right) \right) = \\ &= x^2 \left(\frac{81}{100} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots \right) \right) \geq x^2 \left(\frac{81}{100} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) > \frac{x^2}{100}. \end{aligned}$$

A becslést (1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$(3) \quad f(n) = \sum_{d=1}^n d \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) \geq \sum_{d=1}^n d \cdot \frac{n^2}{100 \cdot d^2} = \frac{n^2}{100} \sum_{d=1}^n \frac{1}{d}$$

Ismert, hogy a harmonikus sor divergens, ezért valamely N -re $\sum_{d=1}^N \frac{1}{d} > 400$ teljesül (például $N = 2^{800}$ megfelel), így $n \geq N$ -re (3) alapján

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i; j) = f(n) \geq \frac{n^2}{100} \cdot 400 = 4n^2,$$

amint azt bizonyítanunk kellett. $\square$

Megjegyzések. 1. A bizonyításból látható, hogy a feladatbeli becslés jobb oldalán álló 4-es szorzó tetszőleges konstanssal helyettesíthető azon az áron, hogy megnő az a legnagyobb egész, melyre a feladatbeli egyenlőtlenség még nem teljesül.

2. Mélyebb számelméleti ismereteket felhasználva megmutatható, hogy a megoldásban szereplő $g(x)$ függvény aszimptotikusan $\frac{6}{\pi^2}x^2$, ahonnan a feladatban szereplő $f(n)$ összeg értéke aszimptotikusan $\frac{6}{\pi^2}x^2 \log x$ -nek adódik.

3. A legtöbb megoldó a fenténél kevésbé elemi, a prímek reciprokösszegének divergenciájára építő megoldást talált. Az alábbiakban vázoljuk ezt a gondolatmenetet.

II. megoldás. Az $(i; j)$ legnagyobb közös osztót az i, j számok közös prímosztóinak összegével becsüljük. Legyenek $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ mindazon prímek, melyek az i és j számokat egyaránt osztják. Mivel bármely szóban forgó prím legalább 2, ezért

$$(4) \quad \begin{aligned} (i; j) &\geq p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \geq p_1 + p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k \geq \\ &\geq p_1 + p_2 + p_3 \cdot \dots \cdot p_k \geq \dots \geq p_1 + p_2 + \dots + p_k \end{aligned}$$

teljesül. Jól ismert, hogy a prímek reciprokösszege ∞ -hez tart, így létezik olyan N szám, melyre az 1 és N közti prímek reciprokösszege nagyobb, mint 6. Ha tehát $n \geq N$, akkor (4) alapján az I. megoldásban definiált $f(n)$ -t az

alábbi módon becsülhetjük:

$$\begin{aligned}
 f(n) &\geq \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p|(i;j)}} \sum_{p|(i;j)} p = \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} p \cdot \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor^2 \geq \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} p \left(\frac{n}{p} - 1 \right)^2 = \\
 &= \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} \left(\frac{n^2}{p} - 2n + p \right) > -2n^2 + n^2 \cdot \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} \frac{1}{p} \geq -2n^2 + n^2 \cdot \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq N}} \frac{1}{p} \geq \\
 &\geq -2n^2 + 6n^2 = 4n^2. \quad \square
 \end{aligned}$$