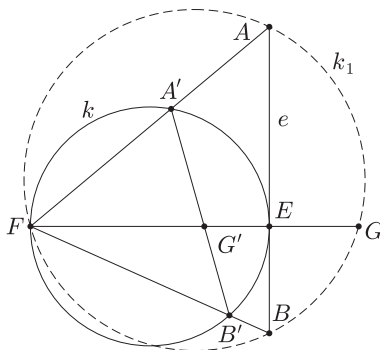


I. megoldás. Legyen az ABF háromszög köré írt k_1 kör és az EF egyenes F -től különböző metszéspontja G . Az E pontnak k_1 körre vonatkozó hatványa $AE \cdot EB = FE \cdot EG$ állandó, ezért a G pont helyzete nem függ az A, B pontpár megválasztásától.



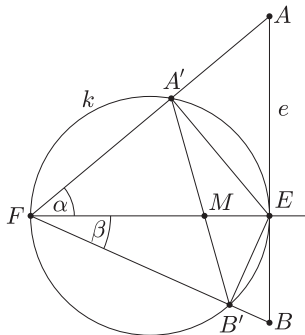
Tekintsük most azt az inverziót, amelynek alapköre az F középpontú, EF sugarú kör. Az e egyenes inverze a k kör, az A és B pontok inverze az A' , illetve a B' pont. A k_1 kör inverze az $A'B'$ egyenes; ezen belül is a G -t tartalmazó körív képe az $A'B'$ szakasz. Az $A'B'$ szakasz tehát mindig átmegy a G pont inverzén, G' -n, mely, mint azt láttuk, független az A és B pontok választásától. $\square$

Megjegyzések. 1. A fenti megoldás az inverzió tulajdonságaira épít, amely nem feltétlenül tananyag a középiskolában (lásd hátsó belső borítóoldalt). Ugyancsak inverziót használ megoldásában *Balogh László* és *Maga Péter*.

2. A fenti megoldásból könnyen látható, hogy ha $EF = 1$, akkor

$$FG' = \frac{1}{FG} = \frac{1}{1 + EG} = \frac{1}{1 + AE \cdot EB}.$$

A továbbiakban megadunk két, szokásosabb megoldást is.



II. megoldás. Legyen most EF és $A'B'$ metszéspontja M . Megmutatjuk, hogy M minden A, B pár esetén ugyanaz a pont; másképpen, az FM hossza állandó. Az FM hosszát az $FA'B'$ háromszög és $FA'EB'$ négyszög területének arányával fogjuk kifejezni:

$$\frac{FM}{EF} = \frac{t_{FA'B'}}{t_{FA'EB'}}.$$

Válasszuk az EF szakasz hosszát egységnek, legyen $\angle AFE = \alpha$ és $\angle BFE = \beta$. Az érintő tulajdonság és a Thalész-tétel szerint az FEA , FEB , illetve $FA'E$ és $FB'E$ háromszögek derékszögűek, így $AE = \tan \alpha$, $BE = \tan \beta$, $FA' = \cos \alpha$, $FB' = \cos \beta$, $A'E = \sin \alpha$ és $B'E = \sin \beta$. A keresett területek tehát:

$$\begin{aligned} t_{FA'B'} &= \frac{1}{2} FA' \cdot FB' \sin(\alpha + \beta) = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2} \\ t_{FA'EB'} &= t_{FA'E} + t_{FEB'} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta}{2} = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{4} = \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{2}. \end{aligned}$$

Végül

$$\begin{aligned} FM &= \frac{FM}{EF} = \frac{t_{FA'B'}}{t_{FA'EB'}} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{1}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1}{1 + EA \cdot EB} \end{aligned}$$

Az FM szakasz hossza tehát állandó. $\square$

III. megoldásvázlat (Kis Gergely megoldása). Válasszuk k középpontját az origónak, sugarát egységnyiinek, legyenek továbbá az A és B pontok koordinátái rendre $(1; a)$, ill. $(1; b)$. Az AF és BF egyenesek, ill. a k kör egyenletei rendre

$$\frac{ax}{2} + \frac{a}{2} = y$$

$$\frac{bx}{2} + \frac{b}{2} = y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

A megfelelő egyenletpárok megoldásából a metszéspontokra

$$A' = \left(\frac{8}{a^2 + 4} - 1; \frac{4a}{a^2 + 4} \right) \quad \text{és} \quad B' = \left(\frac{8}{b^2 + 4} - 1; \frac{4b}{b^2 + 4} \right)$$

adódik. Az $A'B'$ egyenes egyenlete innen

$$\frac{4 + ab}{2(a + b)} \left(x + 1 - \frac{8}{a^2 + 4} \right) + \frac{4a}{a^2 + 4} = y.$$

Az $A'B'$ egyenes x tengellyel való metszéspontjának x koordinátája a fenti egyenletből $y = 0$ helyettesítéssel

$$x_0 = \frac{4 + ab}{4 - ab}.$$

Ez a mennyiség állandó, hiszen ab állandó. Ez azt jelenti, hogy az $A'B'$ egyenesek mindegyike átmegy az $(x_0; 0)$ ponton. $\square$