I. megoldás. Alakítsuk át a kifejezést és emeljük ki a-t: $a(a+b+c)=bc$. Legyen $a=2x+1$, $b=2y+1$, $c=2z+1$. Ekkor

$$(2x+1)(2x+1+2y+1+2z+1)=(2y+1)(2z+1),$$

innen $2x^2+2xy+2xz+4x+1=2yz$. A bal oldal páratlan, a jobb oldal pedig páros.

Ez ellentmondás, ilyen a, b, c páratlan számok tehát nem léteznek.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy van egy ilyen számhármas.

Legyen $d=\frac{a+b}{2}$, $e=\frac{a+c}{2}$, $f=\frac{b+c}{2}$. Ezek mindegyike egész, mivel két páratlan szám összegét, azaz egy páros számot osztottunk kettővel. Mivel

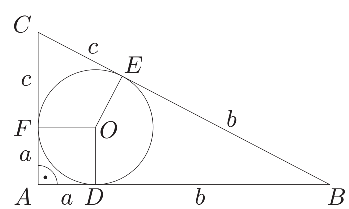
$$d+e+f=\frac{2a+2b+2c}{2}=a+b+c$$

és az a, b, c számok mindegyike páratlan, így $d+e+f$ is páratlan.

Másrészt viszont az eredeti egyenlet úgy is írható, hogy $(2d)^2+(2e)^2=(2f)^2$, ezt 4-gyel osztva kapjuk, hogy $d^2+e^2=f^2$. Tehát d^2+e^2 és f^2 kettes maradéka is megegyezik, vagyis az összegük, $d^2+e^2+f^2$ páros. Mivel kettővel osztva egy szám és a négyzete ugyanolyan maradékot ad, azért d pontosan akkor páros, ha d^2, hasonlóan e és f paritása is rendre megegyezik e^2 és f^2 paritásával. Tehát $d+e+f$ is páros. Ez ellentmondás. Tehát nincsen megfelelő számhármas.

III. megoldás. Tekintsünk egy derékszögű háromszöget, amelynek oldalai: $(a+b)$, $(a+c)$, $(b+c)$. Ebben a háromszögben teljesül, hogy

$$(a+b)^2+(a+c)^2=(b+c)^2.$$



Külső pontból a körhöz húzott érintők egyenlők. Írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen.

$T=\frac{(a+c)(a+b)}{2}$. Ha a, b, c páratlan, akkor $(a+b)$ és $(a+c)$ is páros, tehát ennek a szorzatnak a fele is páros szám.

A szokásos jelölésekkel ugyanakkor $T=rs=a(a+b+c)$. A beírt kör sugara ugyanis a derékszögű háromszögben a-val egyenlő, mert az $ADOF$ négyszögben három derékszög van, valamint két-két szomszédos oldala egyenlő, tehát négyzet, így $a=r$. Ha a, b, c páratlan, akkor a szorzat mindkét tényezője páratlan, tehát a szorzat értéke, a terület páratlan. A két eredmény nem egyenlő, vagyis nem léteznek olyan páratlan a, b, c számok, amelyekre az egyenlőség teljesül.