Megoldás. „A mérés eléggé összetett volt, de a sok türelmet és néha agysebészi mozdulatokat igénylő munka meghozta az eredményt; a mérési adatokból sikerült érdekes következtetéseket levonni.” – írja *Szabó Áron* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. évf.). A továbbiakban is (némi rövidítéssel) az ő megoldását követjük.

1. A mérés elve. Egy függőlegesen kifeszített hajszál közepére vízszintesen egy megfaragott gyufaszálat erősítettem, ennek a lengésidejéből határoztam meg a hajszál (tulajdonképpen két egyformának tekintett hajszálból álló rendszer) torziós állandóját.

A harmonikus rugórezgés $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ rezgésidejének analógiájából adódik a torziós lengések periódusidejének $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}$ képlete, ahol Θ ez esetben a gyufaszál tehetetlenségi nyomatéka a (tömeg)középpontján átmenő tengelyre, D^* pedig a két fél hajszál torziós állandójának az összege. Ez a rezgésidő az amplitúdótól függetlenül állandó, még akkor is, ha a lengés csillapodik (lásd pl. Budó Á.: Kísérleti fizika, I. kötet, 88. §.). Az előző képlet alapján $D^* = \frac{4\pi^2\Theta}{T^2}$. A gyufaszál (tömör, homogén, vékony rúd) Θ-ja az adott tengelyre $\frac{1}{12}ml^2$, ha m a gyufa tömege és l a hossza.

A lengés csillapodását vizsgálva azt kapjuk majd, hogy a kitérési maximumok egy exponenciális függvényre illeszkednek. A kitérés–idő függvény alakja az elméleti várakozás (lásd pl. Budó I., ugyanott) szerint

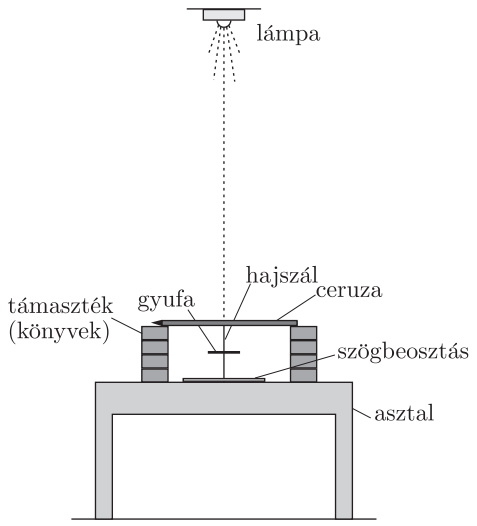
$$x = A\,e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

ahol x a pillanatnyi kitérés, A konstans, β a csillapodási állandó ($1/\beta$ idő alatt csökken a lengési amplitúdó e-ed részére), ω a körfrekvencia, φ_0 pedig a kezdőfázis.

A feladatnak része volt a mérés elvégzése különböző páratartalmú légterekben. A páratartalom nyilván befolyásolja a hajszál hosszát (a hajszálas higrométerek is ezen az elven működnek), esetleg más tulajdonságait is, ami miatt D^* változik.

2. A mérés leírása. Az eredeti gyufaszál fejét levágtam, a megmaradó rész hossza 5 cm volt. A tömegét 4 tizedesjegy pontossággal mérő digitális mérleggel mértem és 0,0930 g-nak találtam. A gyufa közepét vonalzóval kijelöltem, és egy nagyon vékony tűvel hosszában kihasítottam (nem fúrtam lyukat). Ez csak a negyedik gyufaszálnál sikerült elfogadhatóan. A hasítás azért volt jobb, mint a lyukfúrás, mert így stabilan tudtam a hajszálat rögzíteni a gyufához. A hajszál hossza kb. 15 cm volt, amiből függőlegesen 10,2 cm állt, a többire a rögzítéshez volt szükség.

Az asztallaphoz celluxszal kartonlapot erősítettem, erre egy adott középpontból kiindulva 5 fokonként szögbeosztást rajzoltam. A hajszál egyik végét pillanatragasztóval a szögmérő középpontjához ragasztottam, a másik végét átbújtattam a gyufaszálon elkészített hasítékon. (A gyufaszálon levő rést eközben egy tűvel szét kellett feszítenem.) A hajszál szabad végét egy kör keresztmetszetű ceruzához ragasztottam, majd annyit tekertem fel a hajszálból a ceruzára, hogy a szál szabadon maradó része 10,2 cm legyen. Ez a hossz azért fontos, mert a gyufa 2 mm széles, így a hajszálból éppen a beállítani kívánt kétszer 5 cm marad szabadon. A ceruzára tekert hajat leragasztottam, majd pillanatragasztóval a gyufát is rögzítettem a hajszálhoz, méghozzá úgy, hogy kitérésmentesen éppen a 0 fokos szögbeosztásnál álljon. A hajszál kifeszítését néhány könyvre és jegyzettömbökből származó lapokra bíztam és úgy oldottam meg, hogy a ceruza mindkét vége alá ugyanolyan magas tornyot építettem (*1. ábra*). A mindkét végén rögzített és kicsit megfeszített hajszál azért előnyös, mert ekkor a gyufaszál csak elfordulni képes, oldalirányú lengéseket nem tud végezni.

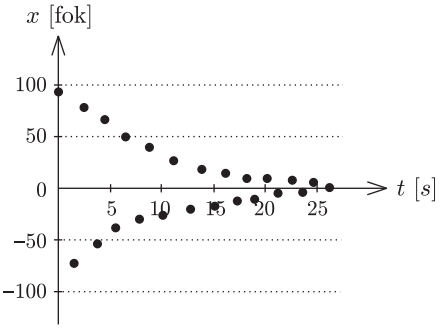


1. ábra. A mérési elrendezés vázlatos rajza

A gyufaszál elfordulásának szögét úgy mértem, hogy a szobát besötétítettem, csupán egyetlen mennyezeti lámpát hagytam égve, amely (az asztal megfelelő eltolása után) pontosan a hajszál fölé került. A viszonylag távoli fényforrás által létrehozott árnyék körvonalai jól kivehetők voltak, pontosan mutatták a gyufaszál eltérülését. A kezdeti szögkitérést mindig $\varphi_0 = 90°$-nak választottam.

A páratartalom mérésére egy régi, NDK gyártmányú hajszálas higrométert használtam, ami a levegő relatív páratartalmát mérte. Elvégeztem a mérést száraz (43%-os páratartalmú) napon, egy másik napon 49%-os páratartalomnál, esős időben (63%-os páratartalomnál), végül a konyhában különböző mértékű gőzölés után (amikor 74%-os illetve 85%-os páratartalmat mértem).

3. Mérési eredmények. Minden páratartalom esetén 3-szor végeztem el a lengések idejének mérését. Az egyes félperiódus-időket nem mértem, mivel az a mérési elvnél leírtak szerint nem változik, hanem 5 teljes lengés lezajlása után állítottam meg a stoppert, és a mért értéket 5-tel osztva kaptam meg a periódusidőt. Az adatokat táblázatba foglaltam, a mért időkből számolt átlagokkal és szórásokkal (relatív hibákkal) együtt. A rezgés csillapodását 43%-os páratartalom mellett figyeltem; ekkor azt az időt is megmértem, amennyi alatt a lengés gyakorlatilag teljesen megállt, továbbá megmértem az egyre csökkenő amplitúdójú lengések legnagyobb kitéréseit, vagyis azokat a szögelfordulásokat, amelyeknél a forgás visszafordult. Eredményeimet táblázatba foglaltam és grafikonon is ábrázoltam (*2. ábra*).



2. ábra. A szögkitérés fokokban mért maximumai az idő függvényében

4. A mérés kiértékelése és a hibák értelmezése. A csillapodást ábrázoló grafikonon jól kivehető az amplitúdó exponenciális jellegű csökkenése. A szélső helyzetekben a szinusz függvény ± 1 értéket vesz fel, így ilyenkor a szögkitérések abszolútértékei várhatóan egy exponenciálisan csökkenő $f(t) = A\,e^{-\beta t}$ függvényre illeszkednek. Ha tehát a szögek mérőszámainak természetes (e alapú) logaritmusát képezzük és ezeket az idő függvényében ábrázoljuk, az $\ln f = \ln A - \beta t$ összfüggésnek megfelelően egy egyenest kapunk. Ezeket a lépéseket elvégeztem, és a legjobban illeszkedő egyenes adatainak leolvasásával $\ln A$-ra 4,53-at, vagyis $A = 93$-at, β-ra pedig 0,128-at kaptam. Értelemszerűen A mértékegysége fok, β-é pedig $1/\mathrm{s}$.

A különböző páratartalmú környezetben végzett mérésekből kiszámított direkciós nyomatékokat a páratartalom függvényében ábrázolva megállapítható, hogy a vizsgált tartományban D^* lineárisan függ a relatív páratartalomtól (p), és az adatokra legjobban illeszkedő egyenes egyenlete:

$$\frac{D^*}{2} = -4{,}54 \cdot 10^{-10}\, p + 0{,}9 \cdot 10^{-7},$$

ha D^*-ot Nm-ben, p-t pedig százalékban mérjük. A negatív meredekség azt a tapasztalati tényt fejezi ki, hogy a páratartalom növekedtével a hajszál torziós állandója lecsökken.

A lengések exponenciális ütemű csillapodása arra utal, hogy a fékezőerők (közegellenállás és a hajszál belső súrlódása) közelítőleg a sebesség első hatványával arányosak. (Ilyen elméleti feltevésből származtatható mozgásegyenlet megoldása valóban exponenciális csillapodást mutat.) Szükséges megjegyezni, hogy az „elméleti" exponenciális görbe amplitúdója sosem csökken nullára, csak minden határon túl megközelíti azt. A valóságban azonban nagyon kis amplitúdók esetén a külső hatások (pl. a légáramlatok) okozta szögsebességváltozás összemérhetővé válik a gyufa pillanatnyi szögsebességével, így a mozgás eltér az elméleti megfontolásokból kapottaktól; pl. a mérési pontosságon belül azt tapasztaljuk, hogy a gyufaszál lengése véges idő alatt megáll.

A mérés pontosságát a fényforrás jó beállítása, valamint a gyufa és a hajszál stabil rögzítése (tehát viszonylag pontos mérési körülmények) mellett a szögmérő beosztásának pontossága, a légáramlatok zavaró hatása és az észlelő szemének „lemaradása" korlátozza. A csillapodási adatokat tartalmazó táblázatból (illetve az ezeket ábrázoló grafikonból) megbecsülhető, hogy a csillapodási tényező mérési pontossága kb. 6–10%. A lengésidők relatív hibájának átlaga 1,5%. A nagyobb pontosság magyarázata: itt már nem volt szükség az elfordulási szögek mérésére, hanem csak az időtartamokéra, s ez (több lengés idejének együttes mérésével) igen pontossá tehető. A többi tényező mérési hibáját és a szisztematikus hibákat (pl. a légmozgás hatását) is tekintetbe véve a direkciós nyomaték mérési pontossága kb. 3%-osra tehető.