

**Megoldás.** Jelölje  $n$  a keresett  $g(x)$  polinom fokszámát. Vizsgáljuk meg először, van-e olyan legfeljebb elsőfokú  $g(x)$  polinom, amelyre  $f(g(x)) = g(f(x))$ . Legyen  $g(x) = bx + c$ . Ekkor

$$f(g(x)) = abx + ac + 1 \quad \text{és} \quad g(f(x)) = bax + b + c.$$

Az elsőfokú tagok egyenlők, így ez a két polinom pontosan akkor azonos, ha  $ac + 1 = b + c$ . Ha  $a = 1$ , akkor innen  $b = 1$ ,  $c$  pedig tetszőleges valós szám, ha pedig  $a \neq 1$ , akkor  $b \neq 0$  tetszőleges és  $c = \frac{1-b}{1-a}$ . Vegyük észre, hogy így a  $b = 0$  esetben is megoldást kapunk, ekkor a  $g(x)$  konstans és értéke  $c = \frac{1}{1-a}$ .

A továbbiakban legyen  $g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$  legalább másodfokú polinom. Ekkor

$$g(f(x)) = b_n(ax + 1)^n + b_{n-1}(ax + 1)^{n-1} + \dots + b_1(ax + 1) + b_0.$$

Rendezzük ezt a polinomot az  $x$  csökkenő hatványai szerint és a binomiális tétel felhasználásával írjuk föl a két legmagasabb fokú tagját:

$$g(f(x)) = b_n a^n x^n + (nb_n a^{n-1} + b_{n-1} a^{n-1}) x^{n-1} + \dots$$

Az  $f(g(x))$  polinom két legmagasabb fokú tagja  $b_n a x^n$  és  $b_{n-1} a x^{n-1}$ .

Ha  $f(g(x)) = g(f(x))$ , akkor szükséges, hogy

$$(1) \quad b_n \cdot a^n = b_n \cdot a,$$

illetve

$$(2) \quad n \cdot b_n \cdot a^{n-1} + b_{n-1} \cdot a^{n-1} = b_{n-1} \cdot a.$$

Az első feltételből  $ab_n \neq 0$  és  $n \geq 2$  figyelembevételével kapjuk, hogy  $a^{n-1} = 1$ . Ha  $n$  páros, akkor innen  $a = 1$ , ha pedig páratlan, akkor  $a = \pm 1$  adódik.

Ha  $a = 1$ , akkor a (2) feltételből  $n \cdot b_n = 0$ , ami nem lehetséges. Nem létezik tehát olyan legalább másodfokú  $g(x)$  polinom, amely az  $f(x) = x + 1$  polinommal fölcserélhető.

Meg kell még vizsgálnunk az  $a = -1$  lehetőséget, amikor  $n$  páratlan. Az  $f(g(x)) = -g(x) + 1$ ,  $g(f(x)) = g(-x + 1)$  polinomok pontosan akkor azonosak, ha

$$(1) \quad g(x) + g(1 - x) = 1.$$

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a  $g(x)$  polinom grafikonja szimmetrikus a  $(0,5; 0,5)$  pontra, a  $g(x)$  polinom  $0,5$ -re szimmetrikus helyeken fölvetett értékei,  $g(0,5 - x)$  és  $g(0,5 + x)$  a  $0,5$ -re szimmetrikusan helyezkednek el, összegük 1:

$$(2) \quad g(0,5 - x) + g(0,5 + x) = 1.$$

(1) és (2) nyilván ekvivalensek, az  $x \leftarrow (0,5 - x)$  helyettesítéssel kaphatók egymásból. (2) pedig úgy is fogalmazható, hogy ha a  $g(x)$  grafikonját a  $(-0,5; -0,5)$  vektorral eltoljuk, akkor a kapott  $h(x) = g(0,5 + x) - 0,5$  polinom grafikonja az origóra szimmetrikus,  $h(x) + h(-x) = 0$ , a  $h(x)$  polinom páratlan.

Ebben az összegben a  $h(x)$  páratlan fokú tagjai kiesnek, a páros fokú tagok pedig megkétszereződnek. Ha tehát ez az összeg azonosan nulla, azaz minden együtthatója nulla, akkor a  $h(x)$ -ben egyáltalán nincsen páros fokú tag: egy polinomfüggvény pontosan akkor páratlan, ha minden tagjának a foka páratlan.

Mivel  $g(x) = h(x - 0,5) + 0,5$ ,  $g(x)$  és  $f(x) = -x + 1$  pontosan akkor cserélhető föl, ha

$$g(x) = 0,5 + \sum_{k \text{ páratlan}} b_k (x - 0,5)^k,$$

ahol a  $b_k$  együtthatók tetszőleges valós számok.

Eredményeinket összefoglalva:

– ha  $a = 1$ , akkor  $g(x) = x + c$ ,

– ha  $a \neq 1$ , akkor  $g(x) = bx + \frac{1-b}{1-a}$ , ahol  $b$  tetszőleges valós szám,

– ha  $a = -1$ , akkor  $g(x) = 0,5 + \sum_{k \text{ páratlan}} b_k (x - 0,5)^k$ .