

Előzetes megjegyzés. Ha x_1, x_2, x_3 jelöli az

$$(1) \quad x^3 - 3x + 1 = 0$$

egyenlet gyökeit, akkor a Viète-formulák szerint

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3 \quad \text{és} \quad x_1x_2x_3 = -1.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a keresett a, b, c számokra fenn kell állnia a

$$-a = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5, \quad b = x_1^5x_2^5 + x_2^5x_3^5 + x_3^5x_1^5, \quad -c = x_1^5x_2^5x_3^5$$

összefüggéseknek.

Elvben világos a teendők: a három egyenlet jobb oldalán az x_1, x_2, x_3 változók szimmetrikus polinomjai állnak, ezek pedig a szimmetrikus polinomok alaptétele szerint kifejezhetők a változók elemi szimmetrikus polinomjaival, tehát (1) együtthatóival. Bár c értéke nyomban adódik, a és b meghatározása meglehetősen hosszadalmas számolásnak ígérkezik. A megoldók többsége ezt sikeresen elvégezte. Ehhez nem is kell ismerni a megoldás háttérében lévő tételt. Az alábbiakban két gyorsabb megoldást mutatunk, az egyik a fenti hatványösszegeket határozza meg célrátörőbben és igen áttekinthető módon, a másik pedig közvetlenül a keresett polinomot írja fel.

I. megoldás. A gyökök ötödik hatványösszegének gyorsabb kiszámolásához a polinomok körében elvégezhető maradékos osztási eljárásnak egy nyilvánvaló, de rendkívül hasznos következményét használjuk fel.

Ha α gyöke a $g(x)$ polinomnak és az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ -szel maradékosan elosztva a maradék $r(x)$, akkor $f(\alpha) = r(\alpha)$, tehát az osztandó és a maradék azonos értékeket vesznek föl az osztó gyökein.

Az állítás nyomban adódik, ha az $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ egyenlőségben a változó helyére α -t helyettesítünk, hiszen $g(\alpha)$ a feltétel szerint nulla. Eredményünk másképpen azt jelenti, hogy az α minden $f(\alpha)$ polinomja egy g -nél alacsonyabb fokszámú polinom, a g -vel való osztási maradék helyettesítési értékeként számolható.

Legyen tehát $g(x) = x^3 - 3x + 1$. Ekkor $g(x)$ gyökeinek ötödik hatványát kell kiszámolnunk, az $f(x) = x^5$ polinom helyettesítési értékét az x_1, x_2, x_3 helyeken, pontosabban ezek összegét. Osszuk el maradékosan az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ -szel:

$$x^5 = (x^3 - 3x + 1)(x^2 + 3) - x^2 + 9x - 3,$$

az $r(x)$ maradék $-x^2 + 9x - 3$. A fentiek szerint ekkor $x_i^5 = -x_i^2 + 9x_i - 3$. Innen pedig $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 9(x_1 + x_2 + x_3) - 3 \cdot 3$, a tényleges feladat tehát a gyökök négyzetösszegének a meghatározása, amely az ismert módon

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)^2}_0 - 2 \underbrace{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}_{-3}.$$

Minden szereplő kifejezés értékét ismerjük, így

$$-a = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 9(x_1 + x_2 + x_3) - 3 \cdot 3 = -6 - 9 = -15.$$

b kiszámolásához gondoljuk meg, milyen „könnyen” ment a gyökök ötödik hatványösszegének a meghatározása. Ezért aztán ahelyett, hogy általában bajlódnánk az ötödik hatványok kéttényezős szorzatainak az összegével, jobb vásárnak tűnik, ha elkészítünk egy olyan $g(x)$ harmadfokú polinomot, amelynek a gyökei éppen ezek a kéttényezős szorzatok, x_1x_2, x_2x_3 , illetve x_3x_1 . Az így kapott polinom gyökeinek ötödik hatványösszegét azután már gyorsan számolhatjuk a fenti módszerrel, a maradékos osztás után már „csak” ezeknek a kéttényezős szorzatoknak a négyzetösszegére van szükségünk.

Megint a Viète-formulákat felhasználva $g(x) = x^3 - b_1x^2 + b_2x - b_3$, ahol

$$b_1 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3,$$

$$b_2 = x_1x_2^2x_3 + x_2x_3^2x_1 + x_3x_1^2x_2 = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 0, \quad \text{végül}$$

$$b_3 = x_1x_2x_2x_3x_3x_1 = (x_1x_2x_3)^2 = 1,$$

tehát most $g(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. Elvégezve a maradékos osztást

$$x^5 = (x^3 + 3x^2 - 1)(x^2 - 3x + 9) - 26x^2 - 3x + 9.$$

A fenti eljárást szó szerint megismételve

$$x_1^5x_2^5 + x_2^5x_3^5 + x_3^5x_1^5 = -26(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2) - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 3 \cdot 9.$$

Mivel $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = b_1^2 - 2b_2 = 9$, az eredmény nyomban adódik:

$$b = x_1^5x_2^5 + x_2^5x_3^5 + x_3^5x_1^5 = -26 \cdot 9 + 9 + 3 \cdot 9 = -198.$$

A keresett polinom tehát $x^3 + 15x^2 - 198x + 1$.

Megjegyzés. A megoldás módszerével általánosan is megoldható a feladat: ha x_1, x_2, x_3 a $g_1(x) = x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3$ polinom gyökei, azaz

$$a_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad a_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \quad a_3 = x_1x_2x_3,$$

akkor a $q_1 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$, $q_2 = x_1^5x_2^5 + x_2^5x_3^5 + x_3^5x_1^5$, $q_3 = x_1^5x_2^5x_3^5$ mennyiségek a következőképpen számolhatók:

q_3 értéke közvetlenül adódik, $q_3 = (x_1x_2x_3)^5 = a_3^5$.

q_1 kiszámításához az $f(x) = x^5$ polinomot kell maradékosan elosztani a

$g_1(x) = x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3$ polinommal. Ezt elvégezve kapjuk, hogy a maradék

$$r(x) = (a_1^3 - 2a_2a_1 + a_3)x^2 + (a_2^2 - a_1^2a_2 + a_1a_3)x + (a_1^2 - a_2)a_3.$$

Innen pedig

$$\begin{aligned} q_1 &= r(x_1) + r(x_2) + r(x_3) = (a_1^3 - 2a_2a_1 + a_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \\ &\quad + (a_2^2 - a_1^2a_2 + a_1a_3)(x_1 + x_2 + x_3) + 3 \cdot (a_1^2 - a_2)a_3. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy a gyökök négyzetösszege $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_1^2 - 2a_2$, megvan az eredmény:

$$q_1 = (a_1^3 - 2a_2a_1 + a_3)(a_1^2 - 2a_2) + (a_2^2 - a_1^2a_2 + a_1a_3)a_1 + 3 \cdot (a_1^2 - a_2)a_3,$$

ami „puszta kézzel” elég barátságtalan számolás volna. Áttekinthetőbb alakot kapunk egyébként, ha az a_1 hatványai szerint rendezve is felírjuk az eredményt:

$$(2) \quad q_1 = a_1^5 - 5a_2a_1^3 + 5a_3a_1^2 + 5a_2^2a_1 - 5a_2a_3.$$

q_2 kiszámításához írjuk fel azt a $g_2(x) = x^3 - b_1x^2 + b_2x - b_3$ polinomot, amelynek a gyökei éppen a $g_1(x)$ gyökeiből készített kéttényezős szorzatok, x_1x_2 , x_2x_3 , illetve x_3x_1 . A megoldásban látottak szerint ekkor

$$b_1 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a_2,$$

$$b_2 = x_1x_2^2x_3 + x_2x_3^2x_1 + x_3x_1^2x_2 = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = a_1a_3, \quad \text{végül}$$

$$b_3 = x_1x_2x_2x_3x_3x_1 = (x_1x_2x_3)^2 = a_3^2.$$

Ezek után (2) alapján $q_2 = b_1^5 - 5b_2b_1^3 + 5b_3b_1^2 + 5b_2^2b_1 - 5b_2b_3$, ahonnan behelyettesítés után

$$q_2 = a_2^5 - 5a_1a_3a_2^3 + 5a_3^2a_2^2 + 5a_1^2a_3^2a_2 - 5a_1a_3^3.$$

II. megoldás. Ha az $x^3 + px + q$ polinom gyökei x_1, x_2 és x_3 , akkor egy szerencsés észrevétellel közvetlenül felírhatunk olyan egyenletet, amelynek éppen x_1^5, x_2^5 és x_3^5 a gyökei. Ha ugyanis az

$$x^{\frac{3}{5}} + px^{\frac{1}{5}} + q$$

kifejezésben x helyére $x_i^{\frac{5}{5}}$ -t helyettesítünk, akkor $x_i^3 + px_i + q$ adódik, ami a feltétel szerint nulla. Megfordítva, ha y megoldása az $x^{\frac{3}{5}} + px^{\frac{1}{5}} + q = 0$ egyenletnek, akkor ötödik gyöke polinomunknak lesz gyöke. A talált alak viszont sajnos nem polinom, de ezen lehet segíteni.

Használjuk fel az

$$(a + b)^5 = a^5 + b^5 + 5ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

azonosságot és emeljük ötödik hatványra az átrendezett

$$(3) \quad x_i^{\frac{3}{5}} + px_i^{\frac{1}{5}} = -q$$

egyenlőségeket ($i = 1, 2, 3$).

$$-q^5 = x_i^3 + p^5x_i + 5px_i^{\frac{4}{5}}(-q)\left(x_i^{\frac{6}{5}} + px_i^{\frac{4}{5}} + p^2x_i^{\frac{2}{5}}\right).$$

A számolás során az $x_i^{\frac{3}{5}} + px_i^{\frac{1}{5}}$ összeget a vele (3) szerint egyenlő $(-q)$ -val helyettesítettük. Ha most a zárójelben álló összegből kiemelünk $x_i^{\frac{1}{5}}$ -t, akkor minden a helyére zökken, ugyanis (3) újabb felhasználásával a megmaradt törtkitevők is eltüntethetők:

$$-q^5 = x_i^3 + p^5x_i - 5pqx_i\left(x_i + p\left[\underbrace{x_i^{\frac{3}{5}} + px_i^{\frac{1}{5}}}_{-q}\right]\right), \quad \text{tehát}$$

$$-q^5 = x_i^3 + p^5x_i - 5pqx_i(x_i - pq).$$

A kapott egyenlőségek így azt jelentik, hogy x_i^5 gyöke az

$$x^3 - 5pqx^2 + (p^5 + 5p^2q^2)x + q^5 = 0$$

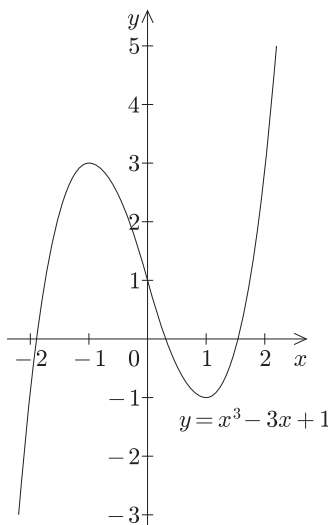
egyenletnek. A feladatban $p = -3$ és $q = 1$, a keresett polinom tehát

$$x^3 + 15x^2 - 198x + 1,$$

$a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

Megjegyzések. 1. Az olvasó általában is megkísérelheti a második megoldás módszerével közvetlenül felírni a megfelelő harmadfokú polinomot, amelynek együtthatói az I. megoldás általános formulái.

2. A hosszúra nyúlt megoldás végén magyarázattal szolgálhatunk a feladat némileg sajátos szövegezésére. Ha közelítő értékeket is elfogadhatónak tekintünk, akkor messze a legegyszerűbb út az eredeti egyenlet, $x^3 - 3x + 1 = 0$ numerikus megoldása, hiszen a szóban forgó hatványösszegek azonnal számolhatók a gyökökből. A feladat nem kérdezte a gyökök jellegét, közöttük elvben komplex számok is lehetnek, ami persze nem befolyásolja a megoldást. Megnyugtatóan fölvezethetjük a függvény grafikonját (*ábra*): leolvasható, hogy az egyenletnek három valós gyöke van. Mivel egyikük sem racionális, csak a közelítő megoldás marad. A gyökök két tizedes pontossággal: $x_1 \approx -1,88$; $x_2 \approx 0,35$; $x_3 \approx 1,53$. Ha ezekkel a közelítő értékekkel végezzük el a számolást, akkor két tizedesre kerekítve $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 \approx -15,1$, illetve $(x_1^5 x_2^5) + (x_2^5 x_3^5) + (x_3^5 x_1^5) \approx -197$. Látható, hogy a második eredménynél a kerekítési hibák már egységnyi eltéréshez vezetnek, a számolás tehát legfeljebb az eredmény tesztelésére jó.



Egy másfajta, önmagában is érdekes megközelítéssel azonban igenis felírható a gyökök „pontos” értéke. Ezt a módszert – a modern algebrai jelölésrendszer kidolgozása mellett – a nevezetes formulák névadója, *François Viète* dolgozta ki, éppen a harmadfokú egyenlet vizsgálata során. (Hozzá tartozik az igazsághoz, hogy magukat a formulákat egy másik francia matematikus, *Albert Girard* vezette be a XVII. század első felében, egy jó emberöltővel Viète után.)

A matematikátörténet Viète-nek tulajdonítja az észrevételt, hogy a fenti típusú hiányos harmadfokú egyenletek kísértetiesen emlékeztetnek bizonyos jól ismert trigonometrikus összefüggésekre. Egyes források szerint azonban már az indiai matematikusok is használták ezt a módszert a XIV. században.

Ha a háromszoros szög szinuszára vonatkozó $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ összefüggést 2-vel szorozzuk és átrendezzük, akkor az (1) egyenlethez hasonló szerkezetű alakot kapunk:

$$(1') \quad (2 \sin \alpha)^3 - 3 \cdot (2 \sin \alpha) + 2 \sin 3\alpha = 0.$$

Ez az azonosság úgy is olvasható, hogy valahányszor az α szögre teljesül, hogy (1') utolsó tagja, $2 \sin 3\alpha$ egyenlő az (1) egyenlet konstans tagjával, ami most 1, akkor erre a szögre $2 \sin \alpha$ az (1) egyenlet megoldása. Ez volt Viète észrevétele. Ezek után az (1) egyenlet gyökei a

$$(4) \quad 2 \sin 3\alpha = 1$$

egyenlet megoldásával kaphatók. A (4) egyenlet megoldásai nyomban adódnak:

$$\alpha = 10^\circ + k \cdot 120^\circ, \quad \text{illetve} \quad \alpha = 50^\circ + k \cdot 120^\circ.$$

A szinuszfüggvény szimmetriáit figyelembe véve három különböző szinusz-érték és így – természetesen – három különböző megoldás adódik: az (1) egyenlet gyökei tehát $2 \sin 10^\circ \approx 0,3473$; $2 \sin 130^\circ \approx 1,5321$, végül $2 \sin 250^\circ \approx -1,8794$.

Ha tehát a szokásos módon a „*Határozzuk meg az a , b , c számokat úgy, hogy...*” formában tűztük volna ki a feladatot, akkor, amint erre *Csikvári Péter* felhívta a figyelmünket, a fentiek alapján kifogástalan az alábbi válasz:

$$a = -2^5(\sin^5 10^\circ + \sin^5 130^\circ + \sin^5 250^\circ),$$

$$b = 2^{10}(\sin^5 10^\circ \cdot \sin^5 130^\circ + \sin^5 130^\circ \cdot \sin^5 250^\circ + \sin^5 250^\circ \cdot \sin^5 10^\circ),$$

$$c = -2^{15} \cdot \sin^5 10^\circ \cdot \sin^5 130^\circ \cdot \sin^5 250^\circ.$$

A feladat szövegében szereplő érthetetlennek tűnő kitétel a tízes számrendszerbeli alakról éppen erről az útról akarta letéríteni Viète esetleges követőit. Valószínűleg maximális pontszámot kellett volna ajánlanunk, ha valaki így oldja meg a feladatot.