

3. feladat. Atomi erő mikroszkóp

(a) A $z(t) = A \sin(\omega t - \Phi)$ függvényt behelyettesítve a szinuszos gerjesztéssel csillapított kényszerrezgést leíró $m\ddot{z} + b\dot{z} + m\omega_0^2 z = F_0 \sin(\omega t)$ egyenletbe, és $\sin(\omega t - \Phi)$ -re, $\cos(\omega t - \Phi)$ -re alkalmazva az addíciós azonosságokat, rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$(1) \quad \overbrace{(bA\omega \sin \Phi + mA(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \Phi - F_0)}^0 \sin(\omega t) + \underbrace{(-mA(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \Phi + bA\omega \cos \Phi)}_0 \cos(\omega t) = 0.$$

Ez az egyenlet csak úgy állhat fenn minden t időpillanatban, ha mindkét kapocssal jelölt kifejezés zérus. Ebből az A amplitúdóra valamint a Φ fázis tangensére a

$$(2) \quad \tan \Phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad A = \frac{F_0}{\sqrt{b^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

megoldás adódik. Speciálisan az $\omega = \omega_0$ „rezonanciafrekvencián”:

$$(3) \quad \Phi = \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{F_0}{b\omega_0}.$$

Megjegyezzük, hogy a *rezonanciafrekvencia* szó itt kicsit félrevezető, ugyanis (2) második összefüggése szerint nem zérus csillapítás mellett ($b > 0$) az $A(\omega)$ amplitúdó a maximumát nem ω_0 , hanem $\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{b^2}{2m^2\omega_0^2}}$ értéknél veszi fel. Azonban a feladatban szereplő $\omega_0 \gg \frac{b}{m} > 0$ feltevés mellett, azaz kis csillapításnál $\omega_{\max} \approx \omega_0$, ezért a feladat további részében is „rezonanciafrekvencián” kicsit pongyolán a gerjesztés és csillapítás nélkül létrejövő rezgés ω_0 frekvenciáját értjük.

(b) A $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ azonosság felhasználásával a lock-in erősítőben létrejövő szorzat jel a következő alakban írható:

$$(4) \quad \begin{aligned} V_i V_R &= V_{i0} \sin(\omega_i t - \Phi_i) V_{R0} \sin(\omega t) = \\ &= \frac{V_{i0} V_{R0}}{2} \left(\cos[(\omega_i - \omega)t - \Phi_i] - \cos[(\omega_i + \omega)t - \Phi_i] \right). \end{aligned}$$

Általában mindkét koszinusz függvény időátlagos értéke nulla. A szorzat jelnek csak az $\omega_i = \omega$ speciális esetben van egyenfeszültségű komponense, ugyanis ekkor az első koszinusz függvény argumentuma független az időtől. Ekkor a kimenő jel egyenfeszültségű komponense:

$$(5) \quad \frac{V_{i0} V_{R0}}{2} \cos \Phi_i.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti számolás rávilágít a lock-in erősítési technika lényegére. Tegyük fel ugyanis, hogy a V_i bemenő jelet nagy, esetleg magánál a V_{i0} jelamplitúdónál is nagyobb véletlen zaj terheli. Hagyományos módon ekkor nem tudnánk kiszűrni a mérendő jelet a háttérzajból. Azonban a lock-in detektor kimenetén a véletlen zaj nulla időátlagú jelet ad, úgy, ahogy $\omega_i \neq \omega$ esetén is zérus a kimeneti jel időátlaga. Pontosabban, a zajt is, mint ahogy minden más jelet, fel lehet bontani különböző frekvenciájú szinuszos jelek összegére (ezt hívják Fourier-analízisnek). A lock-in detektor egy igen erősen szelektív frekvenciaszűrőként működik, a referencia jel ω frekvenciájának egy nagyon szűk környékén átengedi a jelet, míg minden más frekvenciájú Fourier-komponenst elnyom. Így a zaj nagy része nem jelenik meg a kimeneten, míg az ω frekvenciájú jel zavartalanul átjut a lock-in erősítőn.

(c) Az (a) pont (3) eredménye szerint az ω_0 rezonanciafrekvencián az érzékelő kar kitérése $\pi/2$ fázissal késik a gerjesztéshez képest. Így az $F = c_1 V'_R = c_1 V_{R0} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ gerjesztés hatására a fotoérzékelő kimenő jele $V_i = c_2 z = c_1 c_2 \frac{V_{R0}}{b\omega_0} \sin(\omega t)$ alakú, azaz azonos fázisban van a $V_R = V_{R0} \sin(\omega t)$ referencia jellel. Így az (5) formulában $\Phi_i = 0$, tehát a lock-in erősítő egyenáramú kimenő jele:

$$(6) \quad \frac{V_{i0} V_{R0}}{2} \cos 0 = c_1 c_2 \frac{V_{R0}^2}{2b\omega_0}.$$

(d) A Δm tömegváltozás hatására az új rezonanciafrekvencia

$$(7) \quad \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\Delta m}{2m}\right), \quad \text{tehát} \quad \Delta \omega_0 = -\omega_0 \frac{\Delta m}{2m}.$$

A rezonanciafrekvencia és a tömegváltozás hatására (2) első egyenletének értelmében a gerjesztés és a kialakult kényszerrezgés közti Φ fázis is megváltozik. Kezdetben (a tömegváltozás előtt) a rendszer $\omega = \omega_0$ rezonanciafrekvencián működött, és a fázistolás értéke $\Phi = \pi/2$ volt. A tömeg megváltozása nem befolyásolja az $\omega = \omega_0$ gerjesztési frekvenciát, azonban a fázis, a tömeg, ill. a rezonanciafrekvencia a $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2} + \Delta\phi$, $m \rightarrow m + \Delta m$, ill. $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \Delta\omega_0$ formulának megfelelően eltolódik. Ezeket a helyettesítéseket elvégezve (2) első egyenletében, és $\Delta\Phi$, ill. Δm kicsiny értékei mellett alkalmas közelítést használva

$$(8) \quad \underbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\Phi\right)}_{\approx -1/\Delta\Phi} = b\omega_0 / \underbrace{\left([m + \Delta m][(\omega_0 + \Delta\omega_0)^2 - \omega_0^2]\right)}_{\approx -\Delta m\omega_0^2},$$

adódik, ahonnan a fáziseltolódásból még éppen kimutatható tömegváltozás:

$$(9) \quad \Delta m = \frac{\Delta\Phi b}{\omega_0} = \frac{b}{m} \cdot \frac{m^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} \cdot \Delta\Phi = 10^3 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{\pi}{1800} \text{ kg} = 1,7 \cdot 10^{-18} \text{ kg}.$$

(e) Mivel a minta által kifejtett $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ erő is lineárisan függ a kar elmozdulásától, csakúgy, mint a rugóerő, a két erő eredője egy új, k' rugóállandójú effektív rugóerőnek tekinthető, és ez határozza meg az új rezonanciafrekvenciát. Pontosabban a h_0 egyensúlyi helyzettől mért $z = h - h_0$ kitérésre a következő mozgásegyenlet írható fel:

$$(10) \quad m\ddot{z} + b\dot{z} + m\omega_0^2 z = F_0 \sin(\omega t) + c_3 z.$$

(Az új egyensúlyi helyzetben az $f(h_0)$ konstans kiesik az egyenletből.)

Látható, hogy az új effektív rugóállandó $k' = m\omega_0^2 - c_3$, így az új rezonanciafrekvencia:

$$(11) \quad \omega'_0 = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}}, \quad \text{és} \quad \Delta\omega_0 = \omega'_0 - \omega_0 \approx -\frac{c_3}{2m\omega_0}.$$

(f) A maximális frekvenciaeltolódás akkor jön létre, amikor a mikroszkóp érzékelő tője éppen a csapdázott elektron fölött van. Ekkor a minta és a kar közti Coulomb-erő $f(h) = k_e \frac{qQ}{h^2}$. Feltéve, hogy a kar rezgésének amplitúdója jóval kisebb, mint a két töltés d_0 távolsága, az $f(h)$ függvényt linearizálhatjuk az egyensúlyi helyzet körül. A meredekségre a

$$(12) \quad c_3 = \left. \frac{df}{dh} \right|_{h=d_0} = -2k_e \frac{qQ}{d_0^3}$$

érték adódik, ahonnan (11) felhasználásával a frekvenciaeltolódás $\Delta\omega_0 \approx \frac{k_e qQ}{m\omega_0 d_0^3}$. Innen a keresett távolság az adatok behelyettesítésével:

$$(13) \quad d_0 = \sqrt[3]{\frac{k_e qQ}{m\omega_0 \Delta\omega_0}} = 4,1 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 41 \text{ nm}.$$

Az 1985-ben G. Binnig, C. F. Quate és Ch. Gerber által felfedezett atomi erő mikroszkóp¹ (*Atomic Force Microscope*, AFM) két tekintetben is a pásztázó alagútmikroszkóp (Scanning Tunneling Microscope, STM) kishúgának tekinthető: egyrészt a két berendezés felfedezői részben azonosak²; másrészt, a két berendezés működési elvének is vannak hasonló vonásai. Mindkét eszközben egy nagyon kisméretű, éles hegyű tűt mozgatnak a minta fölött, soronként pásztázva végig a minta felszínét. Mindkét berendezés alkalmas atomi méretű mintázatok detektálására. Az STM-ben a mért jel a tű és a minta között folyó áram ingadozása, míg az AFM-ben a tűre ható mechanikai erő finom változásait érzékeli. Így az atomi erő mikroszkóp lényegében úgy tapogatja le a minta felszínét, mint ahogy a régi lemezjátszók tője érzékeli a hangjeleket tartalmazó mikrobarázdákat a bakelit hanglemezen.

A fenti feladat az AFM egy fejlettebb változatának elvi működéséhez kapcsolódik; az érzékelő tű nem kerül direkt kontaktusba a minta felszínével, hanem ahhoz nagyon közel gerjesztett rezgőmozgást végez, és a rezgés fázisának a minta hatására bekövetkező eltolódását detektálják.

Az AFM technikának több jelentős előnye is van a néhány évvel korábban felfedezett STM-mel szemben: a mintát nem kell légüres térbe helyezni, vizsgálhatók levegőben, vagy folyadék alatt levő minták is; a mintának nem kell elektromos vezetőnek lennie; a vizsgálat kevésbé roncsoló hatású, így vizsgálhatók lágyabb minták, például biológiai szövetek is.

¹ *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 930–933 (1986).

² A pásztázó alagútmikroszkópot G. Binnig és H. Rohrer fedezte föl 1981-ben; felfedezésükért 1986-ban Nobel-díjat kaptak.