

2. feladat. Felemelkedő ballon

(a) Felhasználva az ideális gáz állapotegyenletét, n mól hélium gáz térfogata $p + \Delta p$ nyomáson és T hőmérsékleten

$$V = \frac{nRT}{p + \Delta p},$$

míg n' mól levegő térfogata p nyomáson és T hőmérsékleten

$$V = \frac{n'RT}{p}.$$

Így a ballon kiszorít $n' = n \frac{p}{p + \Delta p}$ mól levegőt, melynek súlya $M_{\text{lev}} n' g$. A kiszorított levegő súlya megegyezik a felhajtóerővel, azaz

$$F_{\text{fel}} = M_{\text{lev}} n g \frac{p}{p + \Delta p}.$$

(b) A z magasságkülönbségből származó nyomásváltozás $-\rho g z$, ha a levegő ρ sűrűsége állandó. Ha a sűrűség a magasság függvényeként változik, akkor a következő egyenletet használhatjuk:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{\rho_0 T_0}{p_0} \frac{p}{T} g,$$

ahol az egyesített gáztörvényt $\frac{\rho T}{p}$ állandó alakban használtuk. Ha ebbe az egyenletbe behelyettesítjük a feladatban megadott $p(z) = p_0(1 - z/z_0)^\eta$ összefüggést, illetve a $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ függvényt, akkor a deriválás elvégzése után a keresett η kitevőt így fejezhetjük ki:

$$\eta = \frac{\rho_0 z_0 g}{p_0} = \frac{1,16 \cdot 4,9 \cdot 10^4 \cdot 9,8}{1,01 \cdot 10^5} = 5,52.$$

A kérdéses kitevő számértéke tehát két értékes jegy pontossággal: 5,5.

(c) Amikor Δp nyomáskülönbség mellett a ballon sugarát r -ről $(r + dr)$ -re növeljük, akkor a rugalmas megnyújtáshoz szükséges munka

$$dW = 4\pi r^2 \Delta p dr,$$

míg ugyanekkora r sugár mellett a rugalmas energia növekményét a feladatban megadott $U = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right)$ energia függvény deriválásával határozhatjuk meg:

$$dW = \left(\frac{dU}{dr} \right) dr = 4\pi \kappa RT \left(4r - 4 \frac{r_0^6}{r^5} \right) dr.$$

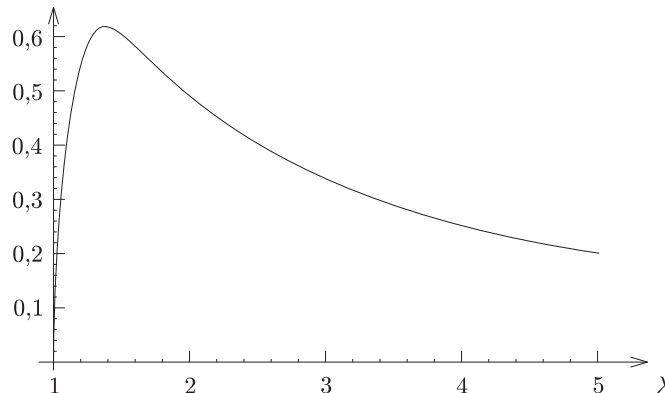
A munkavégzés kétféle kifejezésének egyenlővé tételével kaphatjuk meg a kívánt választ:

$$\Delta p = 4\kappa RT \left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^6}{r^7} \right) = \frac{4\kappa RT}{r_0} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right).$$

A nyomáskülönbség grafikon λ (>1) függvényében kezdetben élesen növekszik, $\lambda = 7^{1/6} = 1,38$ értéknél maximumot vesz fel, majd nagy λ értékeknél λ^{-1} szerint csökken. A következő ábrán a dimenziótlan

$$\frac{\Delta p}{\frac{4\kappa RT}{r_0}} = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right)$$

kifejezés ábrázolása látható:



(d) Írjuk fel az ideális gáz állapotegyenletét: $p_0 V_0 = n_0 R T_0$, ahol V_0 a feszítetlen falú ballon térfogatát jelenti. Az n mól gázt tartalmazó ballon belső nyomása $V = \lambda^3 V_0$ térfogat mellett $T = T_0$ hőmérsékleten:

$$p_{\text{belső}} = \frac{n R T_0}{V} = \frac{n}{n_0 \lambda^3} p_0.$$

Másrészt a ballon belső nyomását a (c) alkérdésre megadott többletnyomás segítségével is kifejezhetjük $T = T_0$ hőmérsékleten:

$$p_{\text{belső}} = p_0 + \Delta p = p_0 + \frac{4\kappa R T_0}{r_0} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) = \left[1 + a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) \right] p_0.$$

A belső nyomás fenti két kifejezését egyenlővé téve határozhatjuk meg az a „ballonparamétert”:

$$a = \frac{\frac{n}{n_0 \lambda^3} - 1}{\lambda^{-1} - \lambda^{-7}}.$$

A megadott $n/n_0 = 3,6$ és $\lambda = 1,5$ numerikus adatokat behelyettesítve, a ballonparaméterre $a = 0,11$ adódik.

(e) Az (a) alkérdésben levezetett felhajtóerő egyensúlyt tart az $M_{\text{teljes}} = 1,12$ kg tömegre ható nehézségi erővel, ami a következő összefüggésre vezet:

$$\frac{p}{p + \Delta p} = \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}} \cdot n}.$$

Másrésről, ha a $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \lambda^3 \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \lambda^3 V_0$ térfogatú ballon belsejében lévő héliumra újra alkalmazzuk az ideális gáz állapotegyenletét, akkor tetszőleges külső p nyomás és T hőmérséklet esetén a ballonban lévő n mól héliumra felírhatjuk:

$$(p + \Delta p) \lambda^3 = \frac{n R T}{V_0} = p_0 \frac{T}{T_0} \frac{n}{n_0}.$$

Ha a fenti két összefüggés mellett felhasználjuk a (c) alkérdésben a nyomáskülönbségre megkapott formulát, akkor meghatározhatjuk a három ismeretlen mennyiséget, vagyis p , Δp és λ értékét mint a T hőmérséklet és egyéb adatok függvényét.

A fenti két összefüggés összevetéséből a felhajtóerő-súly egyensúlyra egy újabb feltételt kapunk:

$$\frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \lambda^3 = \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}} \cdot n_0}.$$

Ezek után használjuk fel a (c) alkérdésben a nyomáskülönbségre megkapott formulát és az ideális gázegyenletből kapott összefüggést:

$$p \lambda^3 + \frac{4\kappa R T}{r_0} \lambda^2 (1 - \lambda^{-6}) = p_0 \frac{T}{T_0} \frac{n}{n_0},$$

illetve ezt átrendezve és felhasználva a korábban bevezetett a „ballonparamétert”:

$$\frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \lambda^3 = \frac{n}{n_0} - a \lambda^2 (1 - \lambda^{-6}).$$

Így az előzőleg a felhajtóerő-súly egyensúlyra kapott feltétellel megegyező bal oldalú összefüggésre jutottunk. A jobb oldalak egyenlővé tételével olyan egyenlethez juthatunk, amely már csak a λ lineáris méretnövekedési arányt tartalmazza:

$$\lambda^2 (1 - \lambda^{-6}) = \frac{1}{a n_0} \left(n - \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}}} \right) = 4,54.$$

Az egyenlet megoldása akkor egyszerű, ha közelítést (belátható, hogy nagyon jó közelítést) használunk:

$$\lambda^2 \approx \frac{4,54}{1 - 4,54^{-3}} \approx 4,54 \quad \longrightarrow \quad \lambda_f \cong 2,13.$$

A ballon maximális emelkedési magasságát úgy kaphatjuk meg, ha a felhajtóerő-súly egyensúlyra kapott feltételben $\left(\frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \right)$ helyére beírjuk a nyomás és a hőmérséklet magasságfüggését, amit a (b) alkérdésben ismerhettünk meg:

$$\frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \lambda_f^3 = \left(1 - \frac{z_f}{z_0} \right)^{\eta-1} \lambda_f^3 = \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}} \cdot n_0} = 3,10.$$

Felhasználva, hogy $\lambda_f = 2,13$ és $(\eta - 1) = 4,5$, a ballon maximális emelkedési magasságára

$$z_f = (49 \text{ km}) \cdot \left(1 - \left[\frac{3,10}{2,13^3} \right]^{\frac{1}{4,5}} \right) = 10,9 \text{ km}.$$

A ballon tehát mintegy 11 km magasságra emelkedik, és lineáris mérete $\lambda_f = 2,1$ -szeresére növekszik.