

1. feladat. „Pingpong-ellenállás”

(a) Az R sugarú, egymástól d ($d \ll R$) távolságra levő kondenzátorlemezek között ható elektrosztatikus erőt két lényegesen különböző módon is kiszámolhatjuk a kondenzátorra kapcsolt V feszültség ismeretében:

i) Az egyik, például az alsó lemezre ható erő megegyezik a lemezen tárolt Q töltésnek és a másik, felső lemez által keltett E' elektromos térerősségnek a szorzatával. A kondenzátoron belüli térerősség $E = \frac{V}{d} = 2E'$, hiszen mindkét kondenzátorlemez azonos E' járulékot ad belül a térhez. Az egyes kondenzátorlemezek Q töltése a kondenzátorlemez körülvevő hengerfelületre felírt Gauss-tételből kapható meg: $Q = 2E'\varepsilon_0 R^2\pi$. Ezek alapján az alsó lemezre ható elektrosztatikus vonzóerő:

$$(1) \quad F = \varepsilon_0 \frac{V^2 R^2 \pi}{2d^2}.$$

ii) A lemezek között ható erőt megkaphatjuk energetikai megfontolások segítségével is! Tegyük föl, hogy a lemezeket a köztük ható F erő ellenében kicsiny Δd távolsággal eltávolítjuk egymástól. Minthogy a kondenzátor állandó V feszültségre van kapcsolva, és $C = \varepsilon_0 \frac{R^2\pi}{d}$ kapacitása megváltozik, töltése is megváltozik, mégpedig

$$(2) \quad \Delta Q = V(C_2 - C_1) = \varepsilon_0 V R^2 \pi \left(\frac{1}{d + \Delta d} - \frac{1}{d} \right) \approx -\varepsilon_0 V R^2 \pi \frac{\Delta d}{d^2}$$

értékkel. (A negatív előjel töltéscsökkenést jelez. A közelítésnél felhasználtuk, hogy $(1 + \alpha)^{-1} \approx 1 - \alpha$, ha $|\alpha| \ll 1$.)

A kondenzátorlemezek eltávolításakor végzett kicsiny $\Delta W = F \cdot \Delta d$ munka kétféle energiaváltozást fedez. Egyrészt a kondenzátor energiája $\Delta E_{\text{kond}} = \frac{1}{2} V \cdot \Delta Q$ értékkel változik meg, hiszen változik a rajta tárolt töltés. Másrészt a telep energiája $\Delta E_{\text{telep}} = -V \cdot \Delta Q$ értékkel változik meg, hiszen az egymáshoz képest V potenciálkülönbségű kapcsok között ΔQ töltés vándorol át. (Ha $\Delta Q > 0$, azaz a telep tölti a kondenzátort, akkor energiája csökken, ez indokolja a negatív előjelet.) Tehát a folyamatra a következő formában írható föl az energiamegmaradás tétele:

$$(3) \quad \Delta W = F \cdot \Delta d = \Delta E_{\text{kond}} + \Delta E_{\text{telep}} = -\frac{1}{2} V \cdot \Delta Q = \varepsilon_0 V^2 R^2 \pi \frac{\Delta d}{2d^2},$$

ahonnan közvetlenül adódik az előző pontban kapott (1) eredmény.

Felhívjuk a figyelmet arra az érdekes tényre, hogy annak ellenére, hogy a kondenzátorlemezek távolításakor *munkát végeztünk*, a kondenzátor energiája *csökkent*, mégpedig pontosan a végzett munkával megegyező értékkel, $\Delta W = -\Delta E_{\text{kond}}$. Ezzel szemben a telep energiája $\Delta E_{\text{telep}} = 2\Delta W$ értékkel *nőtt*, hiszen a kondenzátor „töltötte” a telepet.

(b) A kondenzátor alsó fegyverzetén fekvő r sugarú kis korong q töltése például a Gauss-tétel segítségével kapható meg. Írjuk föl a tételt egy olyan hengerfelületre, amely körbeveszi a kis korongot: $q = \varepsilon_0 E r^2 \pi = \varepsilon_0 \frac{r^2 \pi}{d} V$, ahonnan a keresett paraméter:

$$(4) \quad \chi = \varepsilon_0 \frac{r^2 \pi}{d}.$$

Kicsit szellemesebben, egyszerűbben is megkaphatjuk a keresett töltést, ha észrevesszük, hogy a fegyverzet teljes Q töltésének éppen a kis korong területére eső $\frac{r^2}{R^2}$ hányada adja meg q -t.

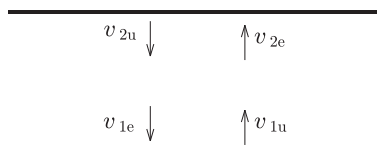
(c) A kis korong akkor emelkedik föl a fegyverzetről, ha a rá ható qE' elektrosztatikus erő megegyezik, vagy nagyobb, mint a lefelé mutató mg nehézségi erő. Hangsúlyozzuk, hogy az alsó fegyverzeten fekvő korongra ható elektrosztatikus erőt csupán a felső fegyverzet által keltett $E' = \frac{E}{2} = \frac{V}{2d}$ térből kell kiszámolnunk, hiszen az alsó fegyverzet nem fejt ki

(függőleges irányú) elektrosztatikus erőt a kis korongra. Így a V_k küszöbfeszültségre az $mg = qE' = \frac{\chi V_k^2}{2d}$ egyenletből

$$(5) \quad V_k = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}$$

érték adódik.

(d) Kövessük nyomon a kis korong mozgását, sebességének változását mozgásának egy periódusa alatt! Jelölje a korong sebességének nagyságát az alsó (1), ill. felső (2) fegyverzetnél közvetlenül az ütközés előtt (e) és után (u) rendre v_{1e} és v_{1u} , ill. v_{2e} és v_{2u} .



Az ütközési szám definíciója szerint

$$(6) \quad v_{1u} = \eta v_{1e}, \quad v_{2u} = \eta v_{2e}.$$

A két ütközés közti felfelé, illetve lefelé való mozgásra felírhatjuk a mechanikai energiamegmaradás tételét. A nehézségi erő munkájából adódó potenciális energiaváltozás $\pm mgd$, míg az elektromos tér munkája $qV = \chi V^2$. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a nehézségi erő munkája negatív a fölfelé történő mozgásnál, és pozitív a lefelé való mozgásnál. Ezzel szemben a Coulomb-erő munkája mindkét esetben pozitív, hiszen az alsó fegyverzetten q töltésre feltöltött korong a felső fegyverzetten leadja töltését, és $-q$ töltésű lesz. Ezek figyelembevételével a mozgás két szakaszára a mechanikai energiamegmaradás törvénye

$$(7) \quad \text{fel:} \quad \frac{1}{2}mv_{2e}^2 = \frac{1}{2}mv_{1u}^2 + \chi V^2 - mgd,$$

$$(8) \quad \text{le:} \quad \frac{1}{2}mv_{1e}^2 = \frac{1}{2}mv_{2u}^2 + \chi V^2 + mgd$$

alakban írható. A (6)–(8) egyenletek felhasználásával rendre kifejezhetjük a v_{2e} , v_{2u} és v_{1e} sebességeket a v_{1u} sebességgel:

$$(9) \quad v_{2e}^2 = v_{1u}^2 + \frac{2\chi V^2}{m} - 2gd,$$

$$(10) \quad v_{2u}^2 = \eta^2 v_{2e}^2 = \eta^2 \left(v_{1u}^2 + \frac{2\chi V^2}{m} - 2gd \right),$$

$$(11) \quad v_{1e}^2 = v_{2u}^2 + \frac{2\chi V^2}{m} + 2gd = \eta^2 v_{1u}^2 + (1 + \eta^2) \frac{2\chi V^2}{m} + (1 - \eta^2) 2gd.$$

Végül felhasználva (6) első egyenletét, valamint az utolsó, (11) összefüggést, az állandósult mozgás $v_{1u} = v_s$ sebességére a következő egyenletet kapjuk:

$$(12) \quad (1 - \eta^4) v_s^2 = \eta^2 \left((1 + \eta^2) \frac{2\chi V^2}{m} + (1 - \eta^2) 2gd \right).$$

Az egyenlet megoldása

$$(13) \quad v_s^2 = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)} V^2 + \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2},$$

ahonnan a keresett α és β együttható értéke:

$$(14) \quad \alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}.$$

(e) Ha teljesül a $qV \gg mgd$ feltétel, akkor a kondenzátorlemezek között mozgó korongra ható elektrosztatikus erő jóval nagyobb, mint a nehézségi erő, így ez utóbbit elhanyagoljuk. Ekkor a korong mozgása szimmetrikus; az emelkedés és a süllyedés is egyenletesen gyorsuló mozgás, és a két mozgás csak irányában különbözik. Az előző pontban a sebességekre kapott kifejezések egyszerűsödnek, a (13), (9) és (6) formulák és $g = 0$ felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(15) \quad v_{1u} = v_{2u} = \sqrt{\alpha} V, \quad v_{1e} = v_{2e} = \frac{1}{\eta} v_{1u} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta} V.$$

A kis korong mozgásának egyik – például az emelkedési – félperiódusában d utat tesz meg egyenletesen gyorsulva v_{1u} -ról v_{2e} sebességre, így a félperiódus ideje

$$t = \frac{2d}{v_{1u} + v_{2e}} = \frac{2d\eta}{\sqrt{\alpha}(1 + \eta)V}.$$

Az átszállított töltés $q = \chi V$, tehát az állandósult állapot elérése után a kis korong által szállított áram átlagos értéke $I = \frac{q}{t}$, ahonnan a keresett γ együttható:

$$(16) \quad \gamma = \frac{\chi\sqrt{\alpha}(1 + \eta)}{2d\eta} = \sqrt{\frac{\chi^3(1 + \eta)}{2md^2(1 - \eta)}}.$$

(f) Ebben a részfeladatban újra figyelembe kell vennünk a nehézségi erő hatását, hiszen kis feszültségértékeknél $qV \not\gg mgd$. A feszültséget csökkentve az áram akkor szűnik meg, amikor a korong sebessége olyan kicsinnyé válik, hogy az már nem emelkedik fel a felső fegyverzetig. A V_c kritikus feszültség mellett a korong éppen $v_{2e} = 0$ sebességgel éri el a felső lapot. A (9) és (13) összefüggéseket felhasználva a

$$(17) \quad 0 = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)}V_c^2 + \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2} + \frac{2\chi}{m}V_c^2 - 2gd$$

egyenletet kapjuk a kritikus feszültségre, melynek megoldása:

$$(18) \quad V_c = \sqrt{\frac{mgd(1-\eta^2)}{\chi(1+\eta^2)}} = V_k \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}}.$$

Az I_c kritikus áram mellett a kis korong éppen eléri a felső fegyverzetet, azaz $v_{2e} = v_{2u} = 0$, és lezajlik a töltéscsere – hiszen folyik áram –, tehát a korongra ható Coulomb-erő iránya, és így az eredő erő nagysága is megváltozik a felső holtponton. A kritikus áram mellett (18) és (13) felhasználásával a v_{1u} és v_{1e} sebességekre azt kapjuk, hogy

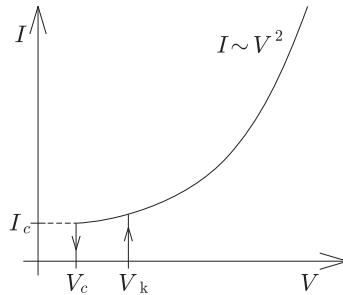
$$(19) \quad v_{1u,c} = 2\eta\sqrt{\frac{gd}{1+\eta^2}}, \quad v_{1e,c} = \frac{v_{1u,c}}{\eta} = 2\sqrt{\frac{gd}{1+\eta^2}}.$$

A korong nulla vég-, ill. kezdősebességű egyenletesen lassuló, ill. gyorsuló mozgást végez az emelkedési, ill. süllyedési szakaszon, azonban e két mozgás időtartama nem azonos. A (19) sebességek ismeretében az emelkedés, ill. süllyedés időtartama

$$(20) \quad t_{\uparrow} = \frac{2d}{v_{1u,c}} = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}}, \quad t_{\downarrow} = \frac{2d}{v_{1e,c}} = \sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}},$$

és egy teljes periódus alatt átszállított töltés $2\chi V_c$, tehát a kritikus áram:

$$(21) \quad I_c = \frac{2\chi V_c}{t_{\uparrow} + t_{\downarrow}} = \frac{2\eta g}{1+\eta^2} \sqrt{m\chi \frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$



Mint hogy $0 < \eta < 1$, a (18) egyenletből látszik, hogy a stacionárius mozgás fenntartásához szükséges V_c feszültség kisebb, mint a korong felemeléséhez szükséges V_k feszültség, tehát az áram–feszültség karakterisztikának *hiszterézise* van. Például $\eta = 0,6$ értékű ütközési szám esetén $V_c \approx 0,485 \cdot V_k$. Az *ábra* vázlatosan mutatja a rendszer karakterisztikáját és a hiszterézist.