

Megoldás. Egy négyszög akkor rombusz, ha paralelogramma és az átlói merőlegesek egymásra. Mindkét tulajdonságot egyszerűen le lehet írni vektorok segítségével, ezért így oldjuk meg a feladatot. Jelöljük a négyszög csúcsait A, B, C, D -vel, egy tetszőleges pontból a csúcsokba mutató helyvektorokat pedig $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ -vel.

A vektorok tulajdonságait felhasználva nyilvánvaló a következő két állítás:

1. *A konvex $ABCD$ négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$.*
2. *A konvex $ABCD$ négyszög átlói pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $(\mathbf{a} - \mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{d}) = 0$.*

Ezt a két vektorokra vonatkozó egyenlőséget kell tehát bebizonyítanunk abból kiindulva, hogy a négyszög bármely két szemközti oldalának felezőpontjai közötti távolság négyzete fele a két oldal négyzetösszegének. Felhasználva a szakasz felezőpontjának helyvektorára vonatkozó képletet, valamint azt, hogy egy vektor négyzete megegyezik hosszának négyzetével, a feltételeket az alábbi két egyenlet írja le:

$$\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} - \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}((\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{d})^2),$$

$$\left(\frac{\mathbf{d} + \mathbf{a}}{2} - \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}((\mathbf{d} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2).$$

Az egyenleteket rendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} - \mathbf{c})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{d})^2 + 2(\mathbf{a} - \mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{d}) &= 2((\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{d})^2), \\ 6pt[(\mathbf{a} - \mathbf{c})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{d})^2 - 2(\mathbf{a} - \mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{d})] &= 2((\mathbf{d} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2).\end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva majd a kapott egyenletet rendezve:

$$\begin{aligned}2((\mathbf{a} - \mathbf{c})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{d})^2) &= 2((\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{d})^2) + 2((\mathbf{d} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2) \\ 0 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d})^2.\end{aligned}$$

Ebből viszont $\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d}$ következik, tehát az $ABCD$ négyszög az 1. állításból következően paralelogramma.

Ha pedig a két egyenletet kivonjuk egymásból, és az így kapott egyenletet rendezzük, akkor:

$$\begin{aligned}4(\mathbf{a} - \mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{d}) &= 2((\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{d})^2) - 2((\mathbf{d} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2) \\ (\mathbf{a} - \mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{d}) &= -\mathbf{ab} - \mathbf{cd} + \mathbf{da} + \mathbf{bc} \\ 2(\mathbf{a} - \mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{d}) &= 0.\end{aligned}$$

Ez viszont a 2. állításból következően azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a feladatban szereplő négyszög rombusz.