

Megoldás. Legyen a tartály aljától a vízsugár becsapódási pontjába mutató vektor vízszintes komponense x , a függőleges komponense y , a vektor hossza pedig d (lásd az *ábrát*)!

A víz (a Torricelli-féle kiáramlási törvény szerint)

$$v = \sqrt{2g(H - h)}$$

magyságú vízszintes kezdősebességgel hagyja el a tartályt, és a víznek egy-egy „darabkája” a függőleges mozgásából számíthatóan

$$t = \sqrt{\frac{2(h+y)}{g}}$$

idő alatt éri el a lejtőt. Ezalatt a vízszintes elmozdulása

$$x = vt = 2\sqrt{(H-h)(h+y)}.$$

Mivel a lejtő hajlásszöge α , fennáll $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Ezt a fenti összefüggésbe helyettesítve, majd négyzetre emelve x -re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$(1) \quad x^2 - 4(H-h)(h+x \operatorname{tg} \alpha) = 0.$$

Ennek az egyenletnek mindig van 2 valós megoldása, melyekből a számunkra érdekes pozitív gyök $x = 2(H-h) \operatorname{tg} \alpha + 2\sqrt{(H-h)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + (H-h)h}$. Célszerű bevezetni az ábrán is látható $z = H-h$ jelölést, ezzel

$$x = 2z \operatorname{tg} \alpha + 2\sqrt{z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + z(H-z)}.$$

Ennek az $x(z)$ kifejezésnek keressük (a $0 \leq z \leq H$ intervallumon) a maximumát. Mivel $x(0) = 0$ és $0 < z < H$ esetén $x > 0$, az $x(z)$ függvénynek vagy ott van maximuma, ahol a z szerinti deriváltja nulla, vagy pedig a $z = H$ helyen.

A derivált eltűnéséből

$$x'(z) = 2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{2z \operatorname{tg}^2 \alpha + H - 2z}{\sqrt{z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + z(H-z)}} = 0,$$

azaz

$$(2) \quad 2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + z(H-z)} = 2z(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) - H.$$

Mivel a bal oldal nemnegatív, a jobb oldal első tagja pozitív kell legyen. Ez akkor teljesül, ha $\operatorname{tg} \alpha < 1$, azaz $\alpha < 45^\circ$. Másrészt (2) jobb oldala nemnegatív, vagyis

$$(3) \quad z \geq \frac{H}{2(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}.$$

A (2) egyenlet, amely négyzetre emelés után z -re nézve másodfokú, algebrai átalakítások után $4(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)z^2 + 4Hz - H^2 = 0$ alakra hozható. A diszkrimináns

$$D = 16H^2 + 4 \cdot 4(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)H^2 = (4H \operatorname{tg} \alpha)^2,$$

(2) megoldásai tehát

$$(4) \quad z_{1,2} = \frac{H \mp H \operatorname{tg} \alpha}{2(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}.$$

Figyelembe véve a (3) egyenlőtlenséget, (4) jobb oldalán a pozitív előjelet kell választanunk:

$$z = \frac{H + H \operatorname{tg} \alpha}{2(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{H}{2} \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ennek az értéke nem lehet nagyobb H -nál:

$$\frac{H}{2} \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} \leq H, \quad \text{ahonnan} \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad \alpha \leq 26,6^\circ$$

következik. Ha ez nem teljesül, akkor az adott intervallumban $x(z)$ -nek nem lehet nulla a deriváltja, így $x(z)$ a maximumát $z = H$ -nál, vagyis $h = 0$ -nál veszi fel.

A vízszög tehát $\alpha \leq 26,6^\circ$ -nak megfelelő lejtőn

$$h = H - z = H - \frac{H}{2} \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - 2 \operatorname{tg} \alpha}{2 - 2 \operatorname{tg} \alpha} H$$

érték esetén csapódik be legmesszebb, és a becsapódás távolsága

$$d = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{H}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

Ha viszont $\alpha \geq 26,6^\circ$, akkor az edény legalján kilövellő víz csapódik be legmesszebb, nevezetesen

$$d = \frac{4H \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

távolságra a tartály aljától.

Megjegyzések. 1. $\alpha = 0$ szögnél az eredmény megegyezik a vízszintes talajon álló tartály egyszerűbb esetével: $h = H/2$ és $d = h$ (lásd a **P. 3673.** feladat megoldását lapunk 373. oldalán).

2. A legnagyobb becsapódási távolságot elemi matematikával (differenciálszámítás nélkül) is meg lehet határozni. Tekintsük az (1) egyenletet, és határozzuk meg adott becsapódási távolság (vagyis adott x) mellett azt a h értéket (vagy értékeket), amely éppen ehhez az x -hez tartozik. Az (1) egyenlet h -ra nézve (is) másodfokú:

$$h^2 + h(x \operatorname{tg} \alpha - H) + \left(\frac{x^2}{4} - Hx \operatorname{tg} \alpha \right) = 0,$$

amelynek akkor van (valós) megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív:

$$(x \operatorname{tg} \alpha - H)^2 - x^2 + 4Hx \operatorname{tg} \alpha = [x(\operatorname{tg} \alpha + 1) + H][x(\operatorname{tg} \alpha - 1) + H] \geq 0.$$

A bal oldali szögletes zárójelben álló kifejezés nem negatív, tehát a másik szögletes zárójelben álló kifejezés sem lehet negatív, így x -re az

$$x \leq \frac{H}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$$

egyenlőtlenség adódik; ez éppen a fenti megoldásban megkapott d értéknek felel meg. A megfelelő kiömlési magasság:

$$h = \frac{1 - 2 \operatorname{tg} \alpha}{2 - 2 \operatorname{tg} \alpha} H.$$

Mivel ez nem lehet negatív, $\operatorname{tg} \alpha > 1/2$ esetén nem a fenti kifejezésnek, hanem $h = 0$ -nak megfelelő $x = 4H \operatorname{tg} \alpha$ adja meg a legnagyobb becsapódási távolság vízszintes vetületét.