

I. megoldás. Bizonyítsuk az állítást n -re vonatkozó teljes indukcióval.

Az $n = 1$ esetén $5^n - 8n^2 + 4n - 1 = 5 - 8 + 4 - 1 = 0$ és $64 \mid 0$. Az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy valamilyen n természetes számra teljesül az állítás. A kifejezés értéke $(n + 1)$ -re:

$$\begin{aligned}5^{n+1} - 8(n+1)^2 + 4(n+1) - 1 &= 5 \cdot 5^n - 8(n^2 + 2n + 1) + 4n + 4 - 1 = \\&= 5 \cdot 5^n - 8n^2 - 16n - 8 + 4n + 4 - 1 = 5 \cdot 5^n - 8n^2 - 12n - 5 = \\&= 5 \cdot (5^n - 8n^2 + 4n - 1) + 32n^2 - 32n = 5 \cdot (5^n - 8n^2 + 4n - 1) + 32n(n - 1).\end{aligned}$$

Az $5^n - 8n^2 + 4n - 1$ az indukciós feltevés szerint osztható 64-gyel, ezért ennek ötszöröse is osztható 64-gyel. A $32n(n - 1)$ is osztható 64-gyel, hiszen két egymást követő természetes szám ($n - 1$ és n) valamelyike biztosan páros, így a 32-szerese osztható 64-gyel. Ha két 64-gyel osztható számot összeadunk, akkor az összegük is osztható 64-gyel, tehát $(n + 1)$ -re is igaz az állítás.

Ezzel minden n pozitív egészre beláttuk, hogy $5^n - 8n^2 + 4n - 1$ osztható 64-gyel.

II. megoldás. Ha $n = 1$, akkor az első megoldás behelyettesítése szerint az állítás igaz. Legyen az n legalább 2 és az $5^n - 8n^2 + 4n - 1$ kifejezés első tagját írjuk fel úgy, mint két tag összegének hatványát: $(4 + 1)^n$. A binomiális tétel alapján ekkor

$$\begin{aligned}5^n - 8n^2 + 4n - 1 &= 4^n + \binom{n}{1} \cdot 4^{n-1} + \dots + \\&+ \binom{n}{n-3} \cdot 4^3 + \binom{n}{n-2} \cdot 4^2 + \binom{n}{n-1} \cdot 4 + 1 - 8n^2 + 4n - 1.\end{aligned}$$

Mivel az első $n - 2$ tag mindegyikében a 4 kitevője legalább 3 és $4^3 = 64$, ezek a tagok oszthatók 64-gyel. Ezekon kívül pedig

$$\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} \quad \text{és} \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1},$$

e ezért

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-2} \cdot 4^2 + \binom{n}{n-1} \cdot 4 + 1 - 8n^2 + 4n - 1 &= \\&= \binom{n}{2} \cdot 4^2 + \binom{n}{1} \cdot 4 + 1 - 8n^2 + 4n - 1 = \\&= \frac{n(n-1)}{2} \cdot 16 + 4n + 1 - 8n^2 + 4n - 1 = 8n^2 - 8n + 4n + 1 - 8n^2 + 4n - 1 = 0,\end{aligned}$$

ami szintén osztható 64-gyel. Ez azt jelenti, hogy $5^n - 8n^2 + 4n - 1$ előáll 64-gyel osztható számok összegeként, ezért osztható 64-gyel.