

**Megoldás.** A megoldás során föltesszük, hogy  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$  és  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$  értelmesek. A három mennyiségnek hatféle sorrendje lehetséges, azonban az esetek száma csökkenthető. Először is vegyük észre, hogy amennyiben a középső elemet rögzítjük, akkor a két szélső elem sorrendje a feladat szempontjából közömbös, három (nem nulla) szám egy adott sorrendben pontosan akkor alkot mértani sorozatot, ha a két szélső tagot felcserélve ugyancsak mértani sorozatot kapunk. (A sorozat hányadosa a csere után a reciprokára változik.) Ezzel az esetek száma a felére csökken.

Másfelől az  $x \leftarrow -x$  helyettesítés fölcseréli  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$  és  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$  értékét, így a  $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ ,  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$ ,  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$  mennyiségekre ebben a sorrendben akkor és csak akkor teljesül a feladat feltétele, ha az adott helyettesítés után  $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ ,  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$  és  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$  alkotnak mértani sorozatot. Így elegendő két esetre szorítkoznunk: ha  $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ , illetve ha  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$  a középső elem.

Jelölje  $\operatorname{tg} x$  értékét  $y$  és az egyszerűség kedvéért legyen  $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = t$ . A megfelelő addíciós tétel felhasználásával

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \frac{t - y}{1 + ty} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = \frac{t + y}{1 - ty}.$$

Ismeretes, hogy három nullától különböző szám pontosan akkor lesz egy mértani sorozat három szomszédos tagja, ha a középső tag négyzete egyenlő a másik két tag szorzatával. Az első esetben, ha  $t$  a középső tag, akkor

$$t^2 = \frac{t - y}{1 + ty} \cdot \frac{t + y}{1 - ty} = \frac{t^2 - y^2}{1 - t^2 y^2},$$

ahonnan  $t^4 y^2 - y^2 = 0$ . Mivel  $t^4 \neq 1$ , azért innen  $y = 0$  következik, azaz  $x = k\pi$ , ahol  $k$  tetszőleges egész szám. Ekkor a három szám egyenlő és nem nulla, valóban mértani sorozatot alkotnak.

Ha  $\frac{t - y}{1 + ty}$  a középső elem, akkor a feltétel szerint most a

$$t \cdot \frac{t + y}{1 - ty} = \left(\frac{t - y}{1 + ty}\right)^2$$

egyenletet kapjuk. A műveleteket elvégezve és  $y$  hatványai szerint rendezve, majd szorzattá alakítva a

$$(t^2 + 1)y[ty^2 + (t^2 - 1)y + 3t] = 0$$

egyenlet adódik. Ha  $y = 0$ , akkor a számok egyenlők, az előző megoldást kapjuk, egyébként  $t \neq 0$ -val osztva az  $y^2 - \frac{1 - t^2}{t}y + 3 = 0$  egyenletet kell megoldanunk. Az elsőfokú tag együttthatója igen megnyugtató: a  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$  azonosság szerint

$$\frac{1 - t^2}{t} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2 \cdot \frac{\pi}{12}} = \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}.$$

A másodfokú egyenlet bal oldala tehát  $y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = (y - \sqrt{3})^2$ , ahonnan  $y = \sqrt{3} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\pi}{3}$ . Ekkor  $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , a három szám pedig  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ ,  $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$  és  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ , amelyek ebben a sorrendben valóban mértani sorozatot alkotnak, a hányados  $q = -(2 + \sqrt{3})$ .

A korábbiak szerint az eddigiek mellett az  $x = -\frac{\pi}{3} + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  alakú számok is megoldásai a feladatnak, ekkor a  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ ,  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$ ,  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$  értékek adják a fenti mértani sorozatot.

A feladat megoldásai tehát az  $x = \varepsilon \cdot \frac{\pi}{3} + n\pi$  alakú számok, ahol  $\varepsilon$  a  $-1, 0, 1$  értékek valamelyike,  $n$  pedig tetszőleges egész szám.

*Megjegyzések.* 1. Érdeemes felfigyelni arra, hogy a feladat nem triviális megoldása a nyilvánvaló  $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = 1 = \operatorname{tg}^2 45^\circ$  azonosság átírata. A jobb oldal ugyanis  $\operatorname{tg}^2(-45^\circ)$ -nek is írható, így pedig az argumentumok a  $-45^\circ, 15^\circ, 75^\circ$  elrendezésben olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek középső tagja  $15^\circ \left(\frac{\pi}{12}\right)$ , míg a megfelelő tangens értékek a  $\operatorname{tg} 15^\circ, \operatorname{tg}(-45^\circ), \operatorname{tg} 75^\circ$  sorrendben alkotnak mértani sorozatot.

2. A megoldás során minden további nélkül használtuk, hogy  $\operatorname{tg} 15^\circ$  pontos értéke  $2 - \sqrt{3}$ . Ez például a szokásos módon igazolható a különbség tangensére vonatkozó azonosság és  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ , illetve  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ismert értékeinek felhasználásával:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = 2 - \sqrt{3}.$$