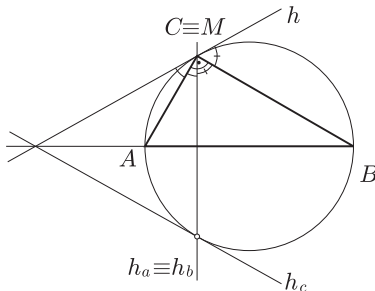


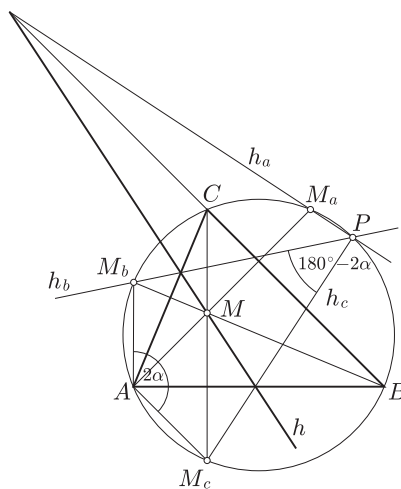
Megoldás. Mivel a középvonalak párhuzamosak az eredeti háromszög megfelelő oldalaival, az eredeti háromszög oldalfelező merőlegesei a középvonalak által alkotott háromszögben magasságvonalak. Vagyis az eredeti háromszög körülírható körének középpontja éppen a középvonalak által alkotott háromszög magasságpontja. Elegendő tehát a következő állítást belátnunk:

Egy háromszög magasságpontján áthaladó egyenesnek a háromszög oldalegyeneseire vett tükörképei egy ponton mennek át.

Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C -vel, szögeit a szokásos módon α, β, γ -val. Válasszuk úgy a jelölést, hogy $90^\circ > \alpha \geq \beta$ teljesüljön. A magasságpontot jelölje M , az ezen áthaladó adott egyenest h , ennek az oldalakra vonatkozó tükörképeit h_a, h_b és h_c , M -nek az oldalegyenesekre vonatkozó tükörképeit pedig M_a, M_b és M_c . Mivel h átmegy M -en, azért h_x átmegy M_x -en ($x = a, b, c$). Tudjuk továbbá (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I.*, 1079. feladat), hogy az M_x pontok rajta vannak az ABC háromszög köré írt k körön.

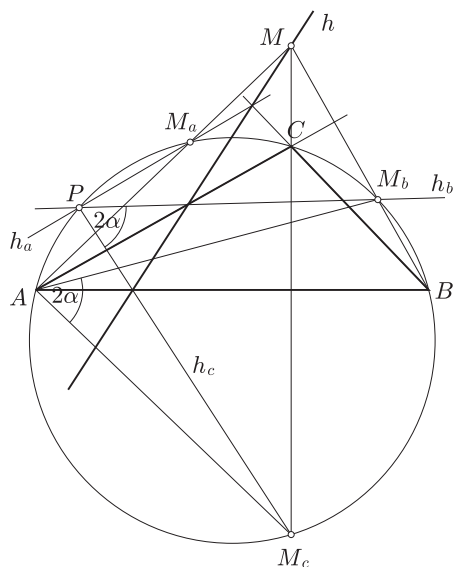


1. ábra

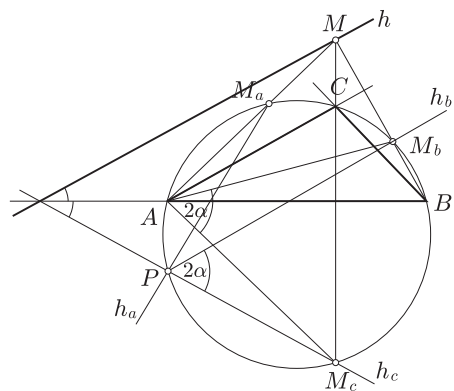


2. ábra

A továbbiakban négy esetet különböztetünk meg. Ha $\gamma = 90^\circ$ (1. ábra), akkor h_a és h_b egybeesik, az állítás nyilvánvaló. Ha γ hegyesszög, akkor a 2. ábrán, ha pedig γ tompaszög, akkor h helyzetétől függően a 3. vagy a 4. ábrán látható lehetőségeket kell vizsgálnunk. Mindhárom esetben igaz, hogy AC felezi az M_bAM , AB pedig felezi az M_cAM szöget. Ezért $M_bAM_c \angle = 2\alpha$ (mert $M_bAM_c \angle = 2 \cdot M_cAM \angle \pm 2 \cdot M_bAM \angle = 2 \cdot CAB \angle$). Ha a h_c egyenest előbb az AB , majd a képét az AC egyenesre tükrözzük, akkor a h_b egyenest kapjuk, hiszen az első tükrözésnél h_c képe h . Viszont a két tükrözés egymásutánja megegyezik egy A körüli $2 \cdot BAC \angle = 2\alpha$ szögű elforgatással. Tehát h_c -t h_b -be egy 2α szögű elforgatás viszi. Ezért a két egyenes egymással 2α (vagy $2\alpha > 90^\circ$ esetén $180^\circ - 2\alpha$) szöget zár be. Ha a két egyenes metszéspontját P jelöli, akkor az egyes eseteknek megfelelően azt kapjuk, hogy $M_bPM_c \angle = 180^\circ - 2\alpha$ (2. ábra), illetve $M_bPM_c \angle = 2\alpha$ (3. és 4. ábra). Tehát P minden esetben rajta van az M_bAM_c háromszög köré írt körön. Ez a kör egyúttal az ABC háromszög köré írt köre is, azaz megegyezik k -val. Ugyanígy láthatjuk be, hogy h_c és h_a metszéspontja – jelöljük Q -val – is rajta van a k körön.



3. ábra

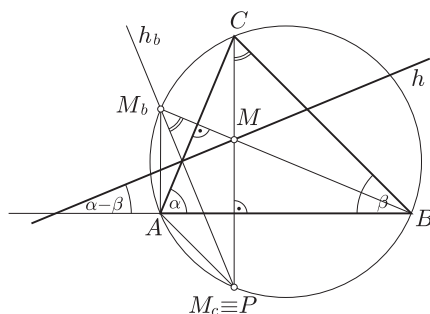


4. ábra

Ha P egybeesik M_c -vel, akkor h_b megegyezik az M_bM_c egyenessel. A kerületi szögek tétele miatt $M_cM_bB\angle = M_cCB\angle = 90^\circ - \beta$, ezért az AC oldallal h_b is, és így h is β szöget zár be (5., ill. 6. ábra). Tehát az AB oldallal h is, és így h_c is $\alpha - \beta$ szöget zár be. Ezért h_c az AB -re merőleges CM egyenessel $90^\circ - (\alpha - \beta)$ szöget zár be. A kerületi szögek tétele miatt

$$M_cBC\angle = M_cBA\angle + ABC\angle = M_cCA\angle + \beta = 90^\circ - \alpha + \beta,$$

ezért az A -t tartalmazó M_cC ívhez tartozó kerületi szög megegyezik h_c és M_cC szögével, h_c tehát M_c -ben érinti k -t. Ebből viszont következik, hogy Q is egybeesik M_c -vel, tehát ebben az esetben igaz az állításunk. Ugyanígy látható be az állítás abban az esetben is, ha azt tesszük fel, hogy Q esik egybe M_c -vel.



5. ábra



Eredeti állításunknál többet is bizonyítottunk. Mivel azt is megmutattuk, hogy a h_a , h_b és h_c egyenesek közös pontja mindig rajta van k -n, azért az eredeti feladatban szereplő tükörképek közös pontja rajta van a háromszög középvonalai által alkotott háromszög köré írt körön, ami nem más, mint az eredeti háromszög Feuerbach-köre.