

Megoldás. A feladat megoldásához először a pozitív x és y számokra az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ egyenlőtlenséget igazoljuk.

Tekintsük az x és y számtani és mértani közepe közötti összefüggést: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Négyzetre emelés után: $\frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$, azaz

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Így

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}, \quad \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{a+b+c}, \quad \frac{16}{a+b+c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Adjuk össze a három egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{a+b+c} + \frac{16}{d} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{16}{a+b+c} + \frac{64}{a+b+c+d},$$

amiből éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.