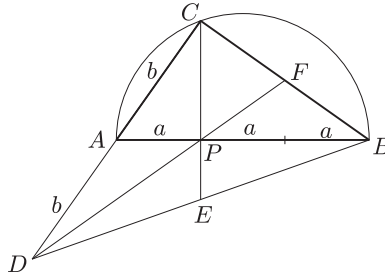


I. megoldás. Létezik olyan háromszög, ahol a súlyvonalak által meghatározott egyik háromszög hasonló az eredetihez. Először megadjuk a konstrukciót a háromszög szerkesztésével, majd belátjuk, hogy ez jó.

Felvezünk egy AB szakaszt, azt elharmadoljuk és megszerkesztjük a Thalész-körét. Az egyik harmadolópontból, P -ből, merőlegest állítunk AB -re, ennek metszéspontja a körrel C . $\angle ACB = 90^\circ$, mert C rajta van AB Thalész-körén. AC -t meghosszabbítjuk A -n túl a saját hosszával, a szakasz végpontja legyen D . A CP egyenes és a DB szakasz metszéspontja legyen E . A DBC háromszögnek AB súlyvonala, mivel $AC = AD$. CE is súlyvonala a DBC háromszögnek, mert a másik súlyvonalnak, AB -nek a megfelelő harmadolópontján halad át. Az APC háromszög tehát a DBC háromszög súlyvonalai által meghatározott egyik háromszög.

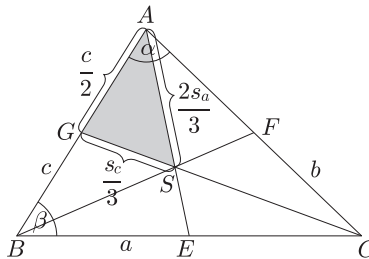


Azt állítjuk, hogy az APC háromszög hasonló a DBC háromszöghöz.

$\angle APC = \angle DCB = 90^\circ$. Ugyanakkor, mivel a DBC háromszög derékszögű és CE a háromszög derékszögű csúcsból induló súlyvonala, $DE = EC (= EB)$, azaz a DEC háromszög egyenlő szárú, így $\angle CDE = \angle ECD$. Tehát az APC háromszög és a DCB háromszög két szöge megegyezik, vagyis a két háromszög valóban hasonló.

Megjegyzés. A hasonlóságot és néhány Pitagorasz-tételt felírva kevés számolás után meghatározható, hogy a DCB háromszög oldalainak aránya $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

II. megoldás. Válasszuk ki tetszőlegesen az egyik kis háromszöget a hat közül ($AGS\Delta$). Vizsgáljuk meg, hogy a nagy háromszög oldalainak hosszára milyen feltételt jelent e két háromszög hasonlósága. Felhasználjuk a súlypont harmadoló tulajdonságát. Tudjuk továbbá, hogy minden ilyen kis háromszögnek a területe $\frac{1}{6}$ -a a nagy háromszög területének. Így hasonlóság csak $\frac{1}{\sqrt{6}}$ aránnyal teljesülhet. Ebből az is következik, hogy az ABC háromszög c oldalának nem lehet az AGS háromszög $AG = \frac{c}{2}$ oldala a megfelelője.



A szöveget figyelve észrevehetjük, hogy $\angle GAS < \alpha$, így a $GS = \frac{s_c}{3}$ oldal nem lehet a nagy háromszög a oldalának a képe. Valamint GC nyilván nem párhuzamos BC -vel, így $\angle AGC \neq \beta$, tehát az $AS = \frac{2s_a}{3}$ nem lehet a nagy háromszög b oldalának a képe.

Két lehetőségünk maradt:

$$\text{I.} \quad \frac{c}{2} = a' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot a, \quad \frac{s_c}{3} = b' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot b, \quad \frac{2s_a}{3} = c' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot c,$$

$$\text{II.} \quad \frac{c}{2} = b' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot b, \quad \frac{s_c}{3} = c' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot c, \quad \frac{2s_a}{3} = a' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot a.$$

Mivel a súlyvonalak hosszát ki tudjuk fejezni a háromszög oldalhosszainak a segítségével, így már csak az a dolgunk, hogy megvizsgáljuk, hogy az a^2, b^2, c^2 -re kapott elsőfokú egyenletrendszer nem vezet-e ellentmondáshoz. Ha nem vezet, akkor létezik ilyen háromszög, mellesleg meg fogjuk kapni oldalainak arányát. Ha ellentmondásra vezet, akkor pedig nem létezik ilyen háromszög.

Kezdjük:

$$\text{I. } \left. \begin{array}{l}
 (1a) \quad \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{6}, \\
 (2a) \quad \frac{s_c^2}{9} = \frac{b^2}{6}, \quad s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}, \\
 (3a) \quad \frac{4s_a^2}{9} = \frac{c^2}{6}, \quad 4s_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2;
 \end{array} \right\}$$

⇓

$$(1b) \quad 3c^2 = 2a^2, \quad (2b) \quad \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4 \cdot 9} = \frac{b^2}{6}, \quad (3b) \quad \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9} = \frac{c^2}{6};$$

⇓

$$(1c) \quad 3c^2 = 2a^2, \quad (2c) \quad 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 6b^2, \quad (3c) \quad 4b^2 + 4c^2 - 2a^2 = 3c^2;$$

(1c)-t írjuk be a (2c) és a (3c) egyenletbe is:

$$(2d) \quad 3c^2 + 2b^2 - c^2 = 6b^2, \quad (3d) \quad 4b^2 + 4c^2 - 3c^2 = 3c^2;$$

⇓

$$\left. \begin{array}{l}
 (2e) \quad 2c^2 = 4b^2 \\
 (3e) \quad 4b^2 = 2c^2
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{A két egyenlet ekvivalens,} \\
 \text{nem kaptunk tehát ellentmondást.}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 3c^2 &= 2a^2 = 6b^2 \\
 \frac{c^2}{2} &= \frac{a^2}{3} = b^2 \\
 \frac{c}{\sqrt{2}} &= \frac{a}{\sqrt{3}} = b,
 \end{aligned}$$

vagyis az oldalak aránya ebben az esetben $a : b : c = \sqrt{3} : 1 : \sqrt{2}$.

$$\text{II. } \left. \begin{array}{l}
 \frac{c^2}{4} = \frac{b^2}{6}, \\
 \frac{s_c^2}{9} = \frac{c^2}{6}, \\
 \frac{4s_a^2}{9} = \frac{a^2}{6};
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{Az előzőhöz hasonlóan végül két ekvivalens egyenlethez} \\
 \text{jutunk. Itt } 3a^2 = 6c^2 = 4b^2, \text{ amiből } a : b : c = 2 : \sqrt{3} : \sqrt{2}.
 \end{array}$$

Ezzel az összes lehetséges háromszöget megkaptuk. Az I. eset az első megoldásban megadott derékszögű háromszöget szolgáltatja. A II. esetbeli háromszög nem derékszögű, így lényegesen ritkábban bukkan föl a dolgozatokban.