

Megoldás. Jelölje a szokásos módon a háromszög oldalait a, b, c , szögeit α, β, γ , területét T és kerületét $2s$. Először bebizonyítunk egy lemmát:

Tetszőleges háromszögben ha egy szög koszinuszának 1-gyel növelt értékét megszorozzuk a körülírt kör sugarának kétszeresével, akkor a szöget bezáró két oldalhoz hozzáírt körök sugarának összegét kapjuk.

Bizonyítás: Mivel a szögek szerepe a háromszögben szimmetrikus, elegendő megmutatnunk, hogy

$$2R(1 + \cos \gamma) = r_a + r_b.$$

Ismert (lásd pl. *Kiss Gy.: Amit jó tudni a háromszögekről*, KöMaL 2002/3, 130–139. old.), hogy

$$R = \frac{abc}{4T}, \quad r_a = \frac{T}{s-a} \quad \text{és} \quad r_b = \frac{T}{s-b}.$$

A koszinusztételből $\cos \gamma$ -t az oldalak segítségével kifejezve kapjuk, hogy

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Állításunk bizonyításához elegendő tehát azt megmutatnunk, hogy

$$2 \cdot \frac{abc}{4T} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1 \right) = \frac{T}{s-a} + \frac{T}{s-b}.$$

Ezzel ekvivalens állítást kapunk, ha mindkét oldalt megszorozzuk $4T$ -vel és felhasználjuk Héron képletét, mely szerint $T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$.

$$2abc \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1 \right) = 4 \cdot (s(s-b)(s-c) + s(s-a)(s-c)).$$

Mindkét oldalt egyszerűbb alakra hozva:

$$c \cdot (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) = 4s(s-c)((s-b) + (s-a)),$$

ami nyilvánvalóan teljesül, mert s definíciója miatt $(s-b) + (s-a) = c$ és $4s(s-c) = 2s(2s-2c) = (a+b)^2 - c^2$. Ezzel a lemmát beláttuk.

A lemmát használva a feladat kérdésére könnyen válaszolhatunk, hiszen a két adott egyenlet így írható:

$$2R(1 + \cos \gamma) = 3R \quad \text{és} \quad 2R(1 + \cos \alpha) = 2R.$$

Az egyenleteket $2R$ -rel elosztva és rendezve kapjuk, hogy

$$\cos \gamma = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \cos \alpha = 0,$$

amiből $\gamma = 60^\circ$ és $\alpha = 90^\circ$.

Tehát a háromszög szögei 90° , 60° és $180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$ lehetnek. Ellenőrizhető, hogy az ilyen szögekkel rendelkező háromszögekben a körök sugaraira megkívánt összefüggések teljesülnek.