

**Megoldás.**  $\sin \alpha$  pontosan akkor 0, ha  $\alpha$   $\pi$ -nek egész számú többszöröse, ezért az  $x$  egész szám akkor lesz megoldása az egyenletnek, ha  $x - \sqrt{x^2 - 3x - 12}$  3-mal osztható egész. Az oszthatóság miatt  $\sqrt{x^2 - 3x - 12}$ -nek is egésznek kell lennie, jelöljük ezt  $a$ -val ( $a \geq 0$ ).

Ekkor

$$x^2 - 3x - 12 = a^2.$$

4-gyel szorozva, majd teljes négyzetté kiegészítve:

$$4x^2 - 12x - 48 = 4a^2, \quad (2x - 3)^2 - 4a^2 = 57.$$

Szorozattá alakítva:

$$(2x - 3 + 2a)(2x - 3 - 2a) = 57.$$

Mivel  $a \geq 0$ ,  $2x - 3 + 2a \geq 2x - 3 - 2a$ . Az 57 prímtényezős felbontása:  $57 = 3 \cdot 19$ , így a következő esetek lehetségesek:

| $2x - 3 + 2a$ | $2x - 3 - 2a$ | $4a$ | $a$ | $x$ | $x - a$ |
|---------------|---------------|------|-----|-----|---------|
| 57            | 1             | 56   | 14  | 16  | 2       |
| 19            | 3             | 16   | 4   | 7   | 3       |
| -1            | -57           | 56   | 14  | -13 | -27     |
| -3            | -19           | 16   | 4   | -4  | 8       |

A táblázatból leolvashatjuk, hogy  $x - a$  akkor lesz osztható 3-mal, ha  $x = 7$ , vagy  $x = -13$ .

Helyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy ezek valóban megoldásai az egyenletnek.