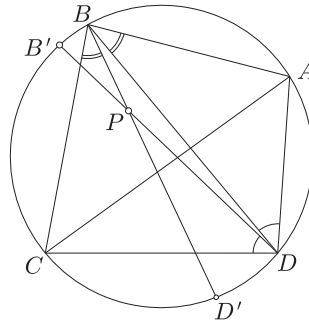


**Kocsis Albert Tihamér megoldása.** Először azt látjuk be, hogy ha  $ABCD$  húrnégyszög, akkor  $PA = PC$ . Legyen  $BP$  és a kör metszéspontja  $D'$ ,  $DP$  és a kör metszéspontja pedig  $B'$  (1. ábra).



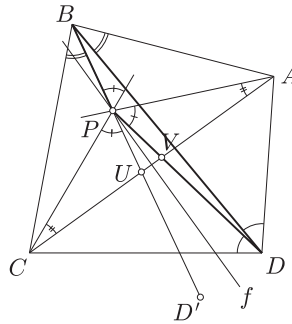
1. ábra

$\angle ABD = \angle D'BC$ , az  $\widehat{AD} = \widehat{D'C}$  ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlők, így  $D$  és  $D'$  az  $AC$  felező merőlegesére tükrösek. Ekkor a  $BD'$  és a  $B'D$  egyenesek is tükrösek erre a felező merőlegesre, a metszéspontjuk,  $P$  tehát rajta van az  $AC$  felező merőlegesén és így valóban  $PA = PC$ .

A megfordításhoz legyen  $PA = PC$ . Belátjuk, hogy a feladat feltételei mellett  $ABCD$  húrnégyszög. Először egy segédítélre lesz szükségünk:

Ha adott egy  $XYZ$  háromszög és a síkjában egy  $Q$  pont, akkor a háromszög csúcsait a  $Q$ -val összekötő egyeneseknek az adott csúcson átmenő belső szögfelezőkre vonatkozó tükrösképei egy ponton haladnak át (esetleg párhuzamosak). A bizonyítás megtalálható például Reiman István – Dobos Sándor: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák (1959–2003)* (Typotex Kiadó, Budapest) c. könyvének függelékében.

Most a  $BPD$  háromszög játssza az  $XYZ$  háromszög szerepét, a  $Q$  pontét pedig az  $A$  pont.  $DA$  tükrösképe a  $PDB$  szög felezőjére éppen a  $DC$  egyenes, míg a  $BA$  tükrösképe a  $DBP$  szög felezőjére a  $BC$  egyenes. Ez a két egyenes most a  $C$  pontban metszi egymást, így a  $PA$  egyenesnek a  $DPB$  szög felezőjére vonatkozó tükrösképe a segédítél állítása szerint átmegy a  $C$  ponton (2. ábra). Ez a tükrösképe tehát a  $CP$  egyenes.



2. ábra

Ekkor  $\angle APB = 180^\circ - \angle DPC$ , így ha  $U = PB \cap AC$  és  $V = DP \cap AC$ , akkor  $\angle VPC = \angle APU$ . Miután a feltétel szerint  $PA = PC$ , továbbá  $\angle PAU = \angle PCV$ , így  $\angle PUV = \angle PVU$ , a  $PUV$  háromszög egyenlő szárú. Jelölje az  $AC$  felező merőlegesét  $f$ .

Ekkor  $PD$  és  $PB$  tükrösek  $f$ -re, ez ugyanis a  $PUV$  háromszög szimmetriatengelye, a  $PD$  és  $PB$  egyenesek pedig a szárjai.

Legyen a  $D$  csúcs tükrösképe  $f$ -re  $D'$ . Az előbbi szimmetria miatt  $D'$  illeszkedik a  $PB$  egyenesre. A feltétel miatt  $\angle ABD = \angle D'BC$ , tehát az  $ADD'C$  szimmetrikus trapézban az egyenlő hosszú  $AD$  és  $D'C$  szakaszok a  $B$  pontból egyenlő szögben látszanak. Az  $AD$  szakasz  $ABD$  szögű látóköre és a  $D'C$  szakasz  $D'BC$  szögű látóköre tehát egybevágó, másrészt ez a két kör is szimmetrikus az  $f$ -re. Ha egybeesnek, akkor  $B$  rajta van ezen a körön, amely egyébként a szimmetrikus  $ADD'C$  trapéz körülírt köre és készen vagyunk,  $ABCD$  húrnégyszög.

Ha a két látókör nem esik egybe, akkor  $B$  metszéspontjuk rajta van a két kör  $f$  szimmetriatengelyén. A fenti gondolatmenetet az  $ADC$  helyett az  $ABC$  háromszögre és a megfelelő  $B'$  pontra megismételve kapjuk, hogy ha a négy pont,  $A, B, C, D$  nincs egy körön, akkor  $D$  is rajta van az  $f$  egyenesen. Ha tehát nem igaz az állítás, akkor  $BD$  az  $AC$  átló felezőmerőlegese, az  $ABCD$  négyszög deltoid,  $BD$  felezi mind az  $ADC$ , mind pedig az  $ABC$  szöget. Ezt viszont a feltétel kizárja, az adott feltételek esetén tehát  $ABCD$  valóban húrnégyszög.