

Egri Attila megoldása. A bizonyítás indirekt: Tegyük fel, hogy valamilyen a, b és c számokra t_a, t_b és t_c nem egy háromszög oldalai, tehát pl. $t_a \geq t_b + t_c$.

A feladat szerint:

$$\begin{aligned} n^2 + 1 &> (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right) = \\ &= n + \sum_{i < j} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right) = n + \sum_{\substack{i < j \\ i, j \notin \{a, b, c\}}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right) + \frac{t_a}{t_b} + \frac{t_b}{t_a} + \frac{t_a}{t_c} + \frac{t_c}{t_a} + \frac{t_b}{t_c} + \frac{t_c}{t_b}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon a szumma jelen belül használjuk fel, hogy $x \in \mathbb{R}^+$ -ra $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Így azt kapjuk, hogy

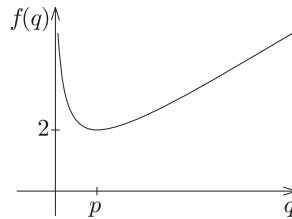
$$(1) \quad n^2 + 1 > n + 2 \cdot \left[\binom{n}{2} - 3 \right] + \frac{t_a}{t_b} + \frac{t_b}{t_a} + \frac{t_a}{t_c} + \frac{t_c}{t_a} + \frac{t_b}{t_c} + \frac{t_c}{t_b}.$$

Belátjuk, hogy az indirekt $t_a \geq t_b + t_c$ feltevésből a nyilvánvaló $T = \frac{t_a}{t_b} + \frac{t_b}{t_a} + \frac{t_a}{t_c} + \frac{t_c}{t_a} + \frac{t_b}{t_c} + \frac{t_c}{t_b} \geq 6$ becslésnél erősebb $T \geq 7$ is megkapható.

Ehhez használjuk fel, hogy ha p -t rögzítjük és q -t p felé közelítjük, akkor $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ értéke csökken. Ez leolvasható az $f(q) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ grafikonjáról (*ábra*), de közvetlen bizonyítás is nyomban adódik:

$$pqr(f(q) - f(r)) = p^2r + q^2r - r^2p - q^2p = (r - p)(q^2 - rp).$$

Ha pedig r elválasztja p -t és q -t, akkor a szorzat tényezői azonos előjelűek, így $0 \leq p, q, r$ miatt $f(q) \geq f(r)$ valóban.



Ezek után írunk T -ben t_a helyére $(t_b + t_c)$ -t. Mivel $t_a \geq t_b + t_c \geq t_b$ és $t_a \geq t_b + t_c \geq t_c$, azért a fentiek szerint ezzel T csökken.

$$\frac{t_a}{t_b} + \frac{t_b}{t_a} \geq \frac{t_b + t_c}{t_b} + \frac{t_c}{t_b + t_c} = 1 + \frac{t_c}{t_b} + \frac{t_b}{t_b + t_c}, \quad \text{illetve}$$

$$\frac{t_a}{t_c} + \frac{t_c}{t_a} \geq \frac{t_b + t_c}{t_c} + \frac{t_c}{t_b + t_c} = 1 + \frac{t_b}{t_c} + \frac{t_c}{t_b + t_c}.$$

Így $T \geq 2 + 2\left(\frac{t_c}{t_b} + \frac{t_b}{t_c}\right) + 1 \geq 7$, hiszen $\frac{t_c}{t_b} + \frac{t_b}{t_c} \geq 2$. Ezzel pedig (1) a következőképpen alakul:

$$n^2 + 1 > n + 2 \left[\binom{n}{2} - 3 \right] + 7 = n^2 + 1,$$

tehát $n^2 + 1 > n^2 + 1$. A kapott ellentmondás azt jelenti, hogy a feladat állítása igaz: minden $i < j < k$ -ra teljesül, hogy t_i, t_j és t_k egy háromszög oldalai.