

Hubai Tamás megoldása. Ha $a = b = c = 0$, akkor a feltétel teljesül, így $3P(0) = 2P(0)$, vagyis $P(0) = 0$. A feltétel nyilván akkor is teljesül, ha $b = c = 0$, és így $P(a) + P(0) + P(-a) = 2P(a)$, ahonnan $P(-a) = P(a)$ adódik minden valós a -ra. A $P(x)$ polinomfüggvény tehát páros, ami csak úgy lehetséges, ha minden páratlan fokú tagja nulla. (A $P(-a) = P(a)$ feltételt átrendezve ugyanis azt kapjuk, hogy $P(x) - P(-x)$ az azonosan nulla polinom, ebben a különbségben pedig éppen a $P(x)$ páratlan fokú tagjai szerepelnek.)

Legyen ezután $Q(x)$ az a polinom, amelyben $P(x)$ tagjai szerepelnek félakkora kitevővel, azaz amelyre $Q(x^2) = P(x)$ és nézzük meg, minek kell teljesülnie a $Q(x)$ polinomra. Az a, b, c közti összefüggést felhasználva csökkentjük a változók számát. Vezessük be az x és y változókat a következőképpen: legyen $a = x + y + c$, $b = y + c$. Ilyen x és y nyilván minden a, b és c hármashoz létezik, másrészt x és y bármely értékére van olyan a, b, c számhármasság, amelyre teljesül a feltétel. Ez egész pontosan azt jelenti, hogy az $a = x + y + c$, $b = y + c$, $ab + bc + ca = 0$ egyenletrendszernek létezik (a, b, c) megoldása. Behelyettesítve ugyanis az $(x + y + c)(y + c) + (y + c)c + c(x + y + c) = 0$ egyenletet kapjuk, ami rendezés után a c -ben másodfokú:

$$3c^2 + (2x + 4y)c + (xy + y^2) = 0,$$

a diszkriminánsa, $4x^2 + 4xy + 4y^2 = 2(x^2 + y^2 + (x + y)^2)$ pedig nem negatív.

Fejezzük ki a feltételben szereplő mennyiségeket az új változók, x és y segítségével: $a - b = x$, $b - c = y$, $c - a = -x - y$, illetve

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca =$$

(felhasználva, hogy a feltétel szerint $ab + bc + ca = 0$ és tovább alakítva)

$$\begin{aligned} &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + (x + y)^2}{2} = x^2 + y^2 + xy. \end{aligned}$$

A P polinomra tehát, mint láttuk, akkor és csak akkor teljesülnek a feladat feltételei, ha bármely valós x, y számpárra fennáll, hogy

$$P(x) + P(y) + P(x + y) = 2P(\sqrt{x^2 + y^2 + xy}).$$

(Vegyük észre, hogy a bal oldal harmadik tagja eredetileg $P(c - a) = P(-x - y)$, ami most azért írható $P(x + y)$ alakban, mert a P páros függvény.)

A $Q(x)$ polinomra nézve ez azt jelenti, hogy

$$(1) \quad Q(x^2) + Q(y^2) + Q(x^2 + y^2 + 2xy) = 2Q(x^2 + y^2 + xy).$$

Az egyenlőségben x két polinomja áll, melyekben az együtthatók az y változó polinomjai. Tegyük fel, hogy a $Q(x)$ polinom n -edfokú és legyen az $n > 1$. A $Q(x)$ főegyütthatójával (1)-ben lehet osztani, föltehető tehát, hogy az 1. Mivel (1)-ben két polinom egyenlősége áll, a két oldalon az x változó minden előforduló hatványának egyenlő az együtthatója. Nekünk az x^{2n-2} tagot érdemes figyelni. Ha x^{n-1} együtthatója a $Q(x)$ -ben λ , akkor x^{2n-2} együtthatói (1) két oldalán:

$$\lambda + 0 + \left(\lambda + ny^2 + \binom{n}{2} \cdot 4y^2 \right) = 2 \left(\lambda + ny^2 + \binom{n}{2} \cdot y^2 \right).$$

Rendezés után innen $2 \cdot \binom{n}{2} = n$, azaz $n > 1$ miatt $n = 2$ adódik. Ez azt jelenti, hogy $n \leq 2$, a $Q(x)$ tehát legfeljebb

másodfokú, a $P(x)$ így legfeljebb negyedfokú páros polinom, amelynek a konstans tagja nulla: $P(x) = \alpha \cdot x^4 + \beta \cdot x^2$.

Megmutatjuk, hogy ezekre a polinomokra teljesül a feladat feltétele. Ezt elég abban a két speciális esetben igazolni, ha $P(x) = x^4$, illetve $P(x) = x^2$. Könnyen ellenőrizhető ugyanis, hogy két megoldás összege, illetve egy megoldás számszorosa is megoldás, így pedig valamennyi adott alakú polinomot megkapjuk a fenti két speciális polinomból.

Ha $P(x) = x^4$, akkor

$$\begin{aligned} &2P(a + b + c) - P(a - b) - P(b - c) - P(c - a) = \\ &= 2(a + b + c)^4 - (a - b)^4 - (b - c)^4 - (c - a)^4 = \\ &= 12(a^3b + b^3c + c^3a + ab^3 + bc^3 + ca^3) + 6(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + \\ &\quad + 24(a^2bc + b^2ac + c^2ab) = \\ &= 6(ab + bc + ca)^2 + 12(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) = 0. \end{aligned}$$

Ha pedig $P(x) = x^2$, akkor

$$\begin{aligned} & 2P(a+b+c) - P(a-b) - P(b-c) - P(c-a) = \\ & = 2(a+b+c)^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 = \\ & = 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) - (a^2 + b^2 - 2ab) - \\ & \quad - (b^2 + c^2 - 2bc) - (c^2 + a^2 - 2ca) = 6(ab + bc + ca) = 0. \end{aligned}$$

Ezzel a megoldást befejeztük, a keresett polinomok a $P(x) = \alpha \cdot x^4 + \beta \cdot x^2$ alakba írhatók, ahol α és β tetszőleges valós számok.