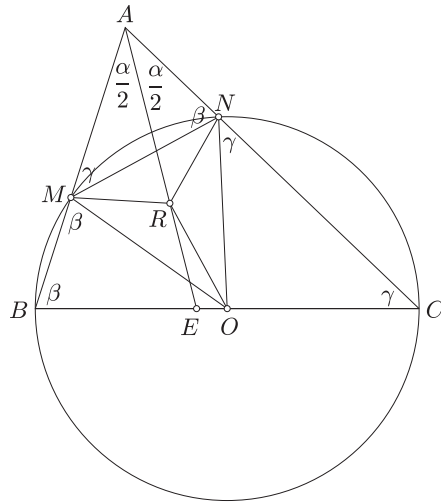


Paulin Roland megoldása. Thálész tétele alapján $BMC \sphericalangle = BNC \sphericalangle = 90^\circ$, így M és N a magasságok talp-pontjai, melyek az ABC háromszög AB , illetve AC oldalainak belsejében vannak, mert a háromszög hegyesszögű.

$BMNC$ húrnégyszög, így $AMN \sphericalangle = \gamma$, $ANM \sphericalangle = \beta$. OBM és OCN egyenlő szárú háromszögekben $OMB \sphericalangle = \beta$, $ONC \sphericalangle = \gamma$, vagyis $OMN \sphericalangle = ONM \sphericalangle = \alpha$, $MON \sphericalangle = \pi - 2\alpha$.



Belátjuk, hogy a BAC és MON szögek szögfelezői e és f nem párhuzamosak, így R egyértelműen meghatározott. $e \parallel f$ esetén legyen $f \cap AC = D$. A DOC háromszögben D -nél $\frac{\alpha}{2}$, C -nél γ , O -nál

$$\begin{aligned} CON \sphericalangle + \frac{NOM \sphericalangle}{2} &= \\ &= (\pi - 2\gamma) + \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{3}{2}\pi - 2\gamma - \alpha \end{aligned}$$

szög van, így a szögösszeg

$$\pi = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{3}{2}\pi - 2\gamma - \alpha.$$

Rendezve:

$$\frac{\alpha}{2} + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + 2\gamma = \pi = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \gamma = \beta \Rightarrow AB = AC.$$

Ezt a feltétel kizárja, így $e \nparallel f$.

Legyen I az OMN háromszög beírt körének középpontja. $IMN \sphericalangle = INM \sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$ miatt $MIN \sphericalangle = \pi - \alpha$, ezért $AMIN$ húrnégyszög, így $IAN \sphericalangle = IMN \sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. Tehát $I \in e$, ugyanakkor $I \in f$ is teljesül, ezért $R = I$.

Legyen $E = e \cap BC$. Ez a BC oldal egy belső pontja. Belátjuk, hogy a BMR és a CNR háromszögek körülírt köre is átmegy E -n. $REB \sphericalangle = AEB \sphericalangle = \pi - \beta - \frac{\alpha}{2}$, $REC \sphericalangle = AEC \sphericalangle = \pi - \gamma - \frac{\alpha}{2}$, míg $RMB \sphericalangle = \beta + \frac{\alpha}{2}$, $RNC \sphericalangle = \gamma + \frac{\alpha}{2}$, így $RMB \sphericalangle + REB \sphericalangle = RNC \sphericalangle + REC \sphericalangle = \pi$. Azaz $RMBE$ és $RNCE$ húrnégyszögek, így az RMB és az RNC háromszögek körülírt körének van közös pontja a BC oldalon.