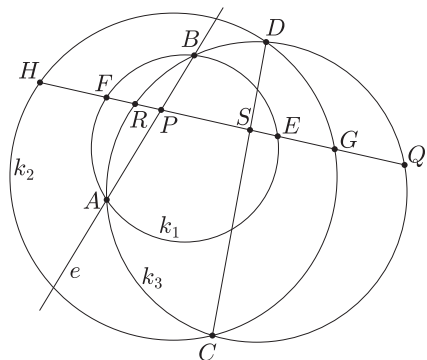


**Megoldás.** Legyenek a  $PQ$  egyenes metszéspontjai a  $k_1$ ,  $k_2$  körökkel és az  $ABQ$  háromszög köré írt  $k_3$  körrel  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  és  $R$  az *ábra* szerint. A  $Q$ ,  $G$ ,  $E$ ,  $P$ ,  $F$ ,  $H$  pontok az  $e$  egyenes választásától nem függnék, és mindig ebben a sorrendben helyezkednek el.



A  $P$  pontnak a  $k_1$  és  $k_3$  körökre vonatkozó hatványából  $PE \cdot PF = PA \cdot PB = PQ \cdot PR$ . Ebből következik, hogy a  $PR = \frac{PE \cdot PF}{PQ}$  előjeles távolság állandó, és így az  $R$  pont is rögzített. Az  $R$  pont a  $PF$  szakasznak belső pontja, mert  $0 < \frac{PR}{PF} = \frac{PE}{PQ} < 1$ . Ebből következik, hogy  $R$  belső pontja a  $k_1$  és a  $k_2$  köröknek is.

A  $P$  pont az  $AB$  szakasz belsejébe esik, mert  $P$  belső pontja  $k_1$ -nek; az  $A$  és  $B$  pontokat ezért a  $PQ$  egyenes elválasztja. Tekintsük azt a három körívet, amelyre a  $k_3$  kört az  $A$ ,  $B$  és  $Q$  pontok felosztják. Az  $A$  és  $B$  pontok a  $k_2$  belsejében vannak, a  $Q$  pont pedig kívül. Ebből következik, hogy a három ív közül a  $QA$  és  $QB$  ívek metszik a  $k_2$  kört, tehát a  $C$  és  $D$  pontok ezen a két köríven helyezkednek el. A  $Q$ ,  $D$ ,  $B$ ,  $R$ ,  $A$  és  $C$  pontok tehát mindig az ábrán látható sorrendben követik egymást a  $k_3$  körön. Ebből következik, hogy a  $CD$  és  $PQ$  szakaszok metszik egymást. A metszéspontot jelöljük  $S$ -sel.

Azt állítjuk, hogy az  $S$  pont sem függ az  $e$  egyenes megválasztásától. Az  $S$  pontnak a  $k_2$  és  $k_3$  körökre vonatkozó hatványából  $SG \cdot SH = SC \cdot SD = SQ \cdot SR$ . Az előjeles szorzat negatív, ezért az  $S$  pont a  $QR$  és a  $GH$  szakasznak is belső pontja, tehát a  $PQ$  egyenesen  $G$  és  $R$  között helyezkedik el. Az  $SG$  szakasz előjeles hosszával kifejezve az  $SH$ ,  $SR$  és  $SQ$  előjeles távolságokat,

$$SG \cdot SH = SQ \cdot SR, \quad SG \cdot (SG - HG) = (SG + GQ) \cdot (SG - RG)$$

$$SG = \frac{RG \cdot GQ}{HG + GQ - RG} = \frac{RG \cdot GQ}{HR + GQ}.$$

Az  $SQ$  szakasz előjeles hossza tehát állandó, az  $S$  pont nem függ az  $e$  egyenes megválasztásától.

*Megjegyzés.* Több versenyző elfeledkezett a pontok lehetséges helyzeteinek vizsgálatáról, és csak annyit bizonyított be, hogy a  $CD$  egyenesek egy ponton mennek át. Ők 4 pontot kaptak.