

I. megoldás. Az első két egyenlet megfelelő oldalainak kivonásából következik, hogy

$$(1) \quad (z - y)(z + y) + x(z - y) = 6, \quad \text{azaz} \quad (z - y)(x + y + z) = 6.$$

A második két egyenlet megfelelő oldalait kivonva kapjuk, hogy:

$$(2) \quad (y - x)(y + x) + z(y - x) = 6, \quad \text{azaz} \quad (y - x)(x + y + z) = 6.$$

(1)-ből és (2)-ből következik: $y - x = z - y$, vagyis $z = 2y - x$.

Az utóbbit helyettesítsük be az eredeti második egyenletbe, ekkor az első egyenlet felhasználásával felírható a következő egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 2xy &= 13 \\ x^2 + y^2 + xy &= 7, \end{aligned} \right\}$$

amiből kapjuk:

$$7x^2 + 28y^2 - 14xy = 91,$$

$$13x^2 + 13y^2 + 13xy = 91.$$

Az alsóból a felsőt kivonva, majd 3-mal osztva: $2x^2 - 5y^2 + 9xy = 0$, amit szorzattá bonthatunk: $(x + 5y)(2x - y) = 0$. Mivel $x + 5y > 0$, azért $y = 2x$, $z = 2 \cdot 2x - x = 3x$. Ekkor az eredeti első egyenlet: $x^2 + 4x^2 + 2x^2 = 7$, vagyis $x^2 = 1$.

Mivel $x > 0$, azért $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Ellenőrizhetjük, hogy valóban mindhárom egyenletet teljesítik ezek a számok.

II. megoldás. Értelmezzük az egyenleteket egy-egy háromszögre felírt koszinusztételként. A $\sqrt{7}$, x , y oldalú háromszögben

$$(\sqrt{7})^2 = x^2 + y^2 - 2 \cos \alpha \cdot xy = x^2 + y^2 + xy.$$

Itt $-2 \cos \alpha = 1$, amiből $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, vagyis $\alpha = 120^\circ$.

Hasonlóképpen a $\sqrt{13}$, x , z és a $\sqrt{19}$, y , z oldalú háromszögekben:

$$(\sqrt{13})^2 = x^2 + z^2 - 2 \cos \beta \cdot xz, \quad \text{ahol} \quad \beta = 120^\circ,$$

$$(\sqrt{19})^2 = y^2 + z^2 - 2 \cos \gamma \cdot yz \quad \text{ahol} \quad \gamma = 120^\circ.$$

Ezekben a háromszögekben tehát az ismert oldalakkal szemben rendre 120° -os szög van. A három háromszöget 120° -os szögükönél összeillesztve egyetlen háromszöget kapunk, melynek oldalai: $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{19}$. Az illesztési pont a háromszög izogonális pontja lesz, egy háromszögnek pedig legfeljebb egy ilyen pontja van. Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek legfeljebb egy megoldása van. Egy megoldást viszont tudunk mondani, ez a következő: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.