

Megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy a háromszög A csúcsa a $(-1; 0)$, B csúcsa az $(1; 0)$ pontba, C csúcsa pedig az y tengely pozitív felére kerüljön. Az a oldalú szabályos háromszög magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, ezért C koordinátái $(0; \sqrt{3})$.

Egy tetszőleges $P(x; y)$ pontnak az A , B , C pontoktól való távolságainak négyzete ekkor az ismert képlet szerint:

$$PA^2 = (x + 1)^2 + y^2, \quad PB^2 = (x - 1)^2 + y^2, \quad \text{és} \quad PC^2 = x^2 + (y - \sqrt{3})^2.$$

Az a) esetben tehát P akkor és csak akkor tartozik a mértani helyhez, ha

$$((x + 1)^2 + y^2) + ((x - 1)^2 + y^2) = x^2 + (y - \sqrt{3})^2.$$

Elvégezve a négyzetreemeléseket majd rendezve:

$$2x^2 + 2y^2 + 2 = x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3,$$

$$(1) \quad x^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 4.$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a keresett mértani hely az (1) egyenletű alakzat, egy olyan kör, melynek középpontja az ABC háromszög C csúcsának az AB oldalra vonatkozó tükörképe, sugara pedig megegyezik a háromszög oldalának hosszával (1. ábra).

1. ábra

A b) esetben P akkor és csak akkor tartozik a mértani helyhez, ha

$$\begin{aligned} &((x+1)^2 + y^2) + ((x-1)^2 + y^2) = \\ &= 2(x^2 + (y - \sqrt{3})^2), \end{aligned}$$

azaz ha

$$2x^2 + 2y^2 + 2 = 2x^2 + 2y^2 - 4\sqrt{3}y + 6,$$

vagyis ha

$$(2) \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a keresett mértani hely most a (2) egyenletű alakzat, egy olyan egyenes, amely párhuzamos az ABC háromszög AB oldalával és átmegy a háromszög súlypontján (2. ábra).

