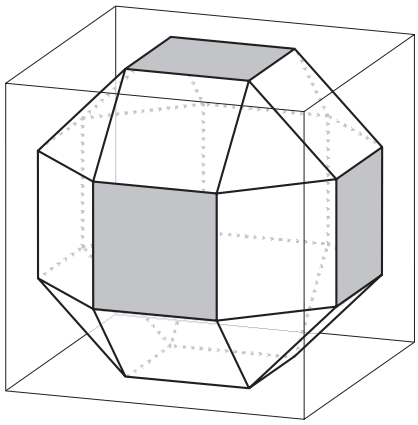
Megoldás. Annak érdekében, hogy minél egyszerűbb legyen a megoldás, válasszuk a kocka élhosszúságát 1-nek. Legyenek a négyzetek egybevágóak, a középpontjaik essenek egybe az őket tartalmazó kockalapok középpontjaival, az oldalaik pedig legyenek párhuzamosak a kockát határoló lapok oldalaival (1. eset) vagy azok átlóival (2. eset).

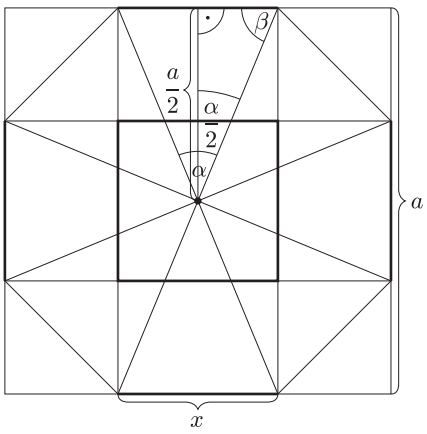
Mindkét lehetőséget megvizsgáljuk.

Ha a négyzet oldalai párhuzamosak a kocka éleivel, akkor az *1. ábra* szerinti testet kaphatjuk. Ezt a testet a 6 négyzeten kívül 12 négyszög és 8 háromszög határolja. A 12 négyszög a négyzetek felvétele miatt biztosan téglalap. Ha ezek a téglalapok egyben négyzetek is, akkor a háromszögek is szabályosak.



1. ábra

Ez pontosan akkor teljesül, ha az oldalak belsejébe írt négyzetek oldalai ugyanolyan hosszúságúak, mint a két szomszédos lapra írt négyzetek legközelebb eső csúcspontjainak a távolsága. Készítsünk el egy alkalmas síkmetszetet (*2. ábra*). Ez nem más, mint egy négyzetbe írt szabályos nyolcszög. Ha a nyolcszög oldalát x jelöli, akkor a befoglaló négyzet oldala $\left(\sqrt{2}+1\right)x$, tehát a beírt négyzet oldalhosszúsága, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$. Így tehát a feladat előírásainak megfelelő testet kapunk.

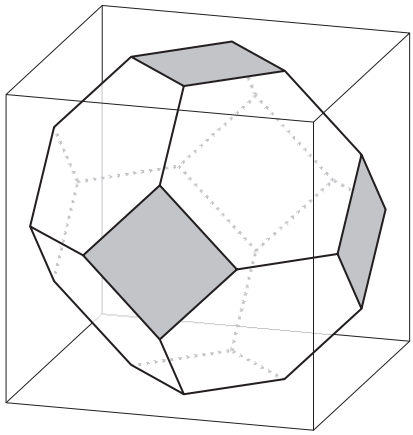


2. ábra

Ha most úgy vesszük föl a négyzeteket, hogy oldalaik a megfelelő lapok átlóival párhuzamosak legyenek, akkor egy lehetséges konstrukció a következő:

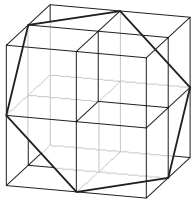
Osszuk fel a kockát 64 db $\dfrac{1}{4}$ élű kockára. A keletkezett rácspontok közül választjuk ki a test csúcsait a korábban említett speciális módon. (Minden lap belsejében olyan rácsnégyzetet veszünk fel, amelynek oldalai az átlókkal párhuzamosak, középpontjuk egybeesik a lapközépponttal. Ez egyértelmű, minden oldalon pontosan egy ilyen van.)

Ekkor a kockában a *3. ábra* szerinti testet kapjuk.



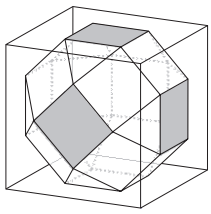
3. ábra

A négyzetek természetesen szabályosak, a hatszögek pedig egy-egy, a kocka csúcsára illeszkedő $2 \times 2 \times 2$-es kocka szabályos hatszög síkmetszetét adják. Ezekről a hatszögekről látható, hogy oldalaik és szögeik egyenlők, és minden oldaluk merőleges a kiskocka határon levő csúcsából induló testátlójára (*4. ábra*).



4. ábra

Megjegyzés. Ez a két test még a speciális elhelyezkedésű négyzetekkel kapható lehetőségek közül sem az összes. Az első esetben két szemközti lapon a négyzetek akármelyikét 45°-kal elforgatva ismét megfelelő testet kapunk, mert a két szemközti lap között egy szabályos nyolcszög alapú hasáb található, amely „nem érzékeny” a szimmetriatengely körüli 45°-os elforgatásra. Ha a két szemközti négyzetet forgatjuk el 45°-kal, továbbra is ugyanazt a testet kapjuk, csak a két elforgatott négyzet más helyzetben lesz a saját kockalapján. Ha pedig csak az egyik négyzetet forgatjuk el, akkor egy újabb testet kapunk, amely továbbra is rendelkezik a szükséges tulajdonságokkal (*5. ábra*). További megoldást láthatunk a címlapon.



5. ábra