

I. megoldás. Az $x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ jelöléssel:

$$x^3 = (\sqrt{5}+2) - (\sqrt{5}-2) - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \cdot \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \right),$$

az $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ azonosság alapján.

Mivel $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 1$, azért összevonás után $x^3 = 4 - 3x$ adódik. A kapott egyenlet 0-ra rendezett alakja alapján:

$$0 = x^3 + 3x - 4 = (x^3 - x^2) + (x^2 - x) + (4x - 4).$$

Szorzáttá alakítjuk:

$$0 = x^2(x-1) + x(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 4).$$

Azonban $x^2 + x + 4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$, így csak $x = 1$ teljesülhet. Tehát a megadott x kifejezés értéke valóban racionális szám, hiszen értéke 1.

II. megoldás. Mivel

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 = \frac{5\sqrt{5}+15+3\sqrt{5}+1}{8} = \sqrt{5}+2$$

és

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 = \frac{5\sqrt{5}-15+3\sqrt{5}-1}{8} = \sqrt{5}-2,$$

azért

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

azaz $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ valóban racionális szám, melynek értéke 1.

III. megoldás. Először szorozzuk meg a kifejezést 2-vel, aztán alakítsuk át:

$$\begin{aligned} 2\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 2\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} &= \sqrt[3]{8\sqrt{5}+16} - \sqrt[3]{8\sqrt{5}-16} = \\ &= \sqrt[3]{5\sqrt{5}+3\cdot 5+3\sqrt{5}+1} - \sqrt[3]{5\sqrt{5}-3\cdot 5+3\sqrt{5}-1} = \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{5}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{5}-1)^3} = (\sqrt{5}+1) - (\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}+1 - \sqrt{5}+1 = 2. \end{aligned}$$

Tehát az eredeti kifejezés ennek a fele, azaz 1, ami racionális.