

Megoldás. Alakítsuk át a kifejezést:

$$a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n} - \frac{1}{1+a_n} = \frac{1+a_n - (1-a_n)}{(1-a_n)(1+a_n)} = \frac{2a_n}{1-a_n^2}.$$

Ismeretes, hogy $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, ezért ha a_1 -et $\operatorname{tg} x$ -nek választjuk, akkor $a_2 = \operatorname{tg} 2x$, $a_3 = \operatorname{tg} 4x$, $\dots$, $a_{n+1} = \operatorname{tg} 2^n x$.
($\operatorname{tg} x$ minden valós értéket felvesz, tehát a_1 -et is.)

Tegyük föl, hogy a sorozat periódusának hossza k . Ekkor $a_{k+1} = a_1$, azaz $\operatorname{tg} 2^k x = \operatorname{tg} x$.

Ez az egyenlőség akkor teljesül, ha $2^k x = x + \pi \cdot l$ ($l \in \mathbb{Z}$), vagyis $(2^k - 1)x = \pi \cdot l$, tehát

$$x = \pi \cdot \frac{l}{2^k - 1}.$$

Ebből következik, hogy a sorozat csak akkor lehet periodikus, hogyha arra az x -re, amelyre $a_1 = \operatorname{tg} x$ teljesül, $x = \pi \cdot \frac{l}{2^k - 1}$ alakú ($k \geq 1$, k és l egész számok).

Ekkor valóban periodikus lesz a sorozat. Meg kell még mutatnunk, hogy a_n sohasem lesz ± 1 , vagyis a definiáló egyenlőség mindig értelmes. Ha ugyanis $a_n = 1$ vagy -1 , akkor $\operatorname{tg}(2^{n-1}x) = 1$ vagy -1 , ebből $2^{n-1}x = \frac{1}{4}\pi + j\pi$ vagy $-\frac{1}{4}\pi + j\pi$ ($j \in \mathbb{Z}$), tehát $x = \frac{1+4j}{2^{n+1}} \cdot \pi$ vagy $x = \frac{-1+4j}{2^{n+1}} \cdot \pi$. Tudjuk viszont hogy $x = \pi \cdot \frac{l}{2^k - 1}$, így e két egyenlőségből

$$\frac{x}{\pi} = \frac{\pm 1 + 4j}{2^{n+1}} = \frac{l}{2^k - 1}$$

következik. Ebből $(\pm 1 + 4j)(2^k - 1) = l \cdot 2^{n+1}$ adódik, de a bal oldal minden egész j -re és $k \geq 1$ -re páratlan, míg a jobb oldal minden egész l -re és $n \geq 1$ esetén páros.

Megjegyzés. Az $\frac{l}{2^k - 1}$ alakú számok speciálisnak tűnnek, valójában azonban minden páratlan nevezőjű racionális szám ilyen alakba írható. Az Euler–Fermat-tétel szerint ugyanis $(a; n) = 1$ esetén $a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 \pmod{n}$. Ha $a = 2$, akkor minden n páratlan szám relatív prím a -hoz. Így tetszőleges páratlan v -hez $\frac{u}{v}$ bővíthető úgy, hogy a nevező 2-hatványnál 1-gyel kisebb legyen:

$$\frac{u}{v} = \frac{u \cdot t}{v \cdot t} \quad \text{és} \quad 2^{\varphi(v)} - 1 \equiv 0 \pmod{v},$$

azaz $t \cdot v = 2^{\varphi(v)} - 1$.