Megoldás. Ismeretes, hogy egy valós együtthatós negyedfokú polinom felbontható valós együtthatós másodfokú polinomok szorzatára, amelyek – esetleg – tovább faktorizálhatók. A szorzat-alak felírásához kíséreljük meg teljes négyzetté alakítani a $p(x) = x^4 + tx^2 + 1$ polinomot. Ez többféleképpen is megtehető:

$$p(x) = \left(x^2 + \frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{t^2}{4} - 1\right), \quad \text{illetve} \tag{1}$$

$$p(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - (2-t)x^2 = \left(x^2+1\right)^2 - (-t+2)x^2 \quad \text{és} \tag{2}$$

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 1 + (2+t)x^2 = \left(x^2-1\right)^2 - (-t-2)x^2. \tag{3}$$

Az (1) alak akkor lesz két négyzet különbsége, ha a második tag, $\frac{t^2}{4} - 1 \geq 0$, azaz $|t| \geq 2$. A (2) alak akkor, ha $-t+2 \geq 0$, azaz $t \leq 2$, végül (3) akkor, ha $-t-2 \geq 0$, vagyis $t \leq -2$. Eszerint ha $|t| \geq 2$, akkor (1)-ből

$$p(x) = \left(x^2 + \frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)\left(x^2 + \frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right).$$

Ha $t \leq 2$, akkor (2)-ből

$$p(x) = \left(x^2+1\right)^2 - (-t+2)x^2 = \left(x^2+1\right)^2 - \left(x\sqrt{-t+2}\right)^2 =$$

$$= \left(x^2 + x\sqrt{-t+2} + 1\right)\left(x^2 - x\sqrt{-t+2} + 1\right).$$

Végül ha $t \leq -2$, akkor (3)-ból

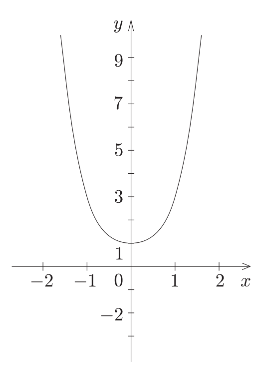
$$p(x) = \left(x^2-1\right)^2 - (-t-2)x^2 = \left(x^2-1\right)^2 - \left(x\sqrt{-t-2}\right)^2 =$$

$$= \left(x^2 + x\sqrt{-t-2} - 1\right)\left(x^2 - x\sqrt{-t-2} - 1\right).$$

Ez azt jelenti, hogy ha $t < -2$, akkor $p(x)$ három lényegesen különböző módon is felbontható két másodfokú polinom szorzatára. Ha $t = -2$, azaz $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, akkor kétféle felbontás van, $p(x) = (x^2-1)(x^2-1) = (x^2-2x+1)(x^2+2x+1)$, végül ha $t > -2$, akkor csak egy felbontás létezik: ezt $t \geq 2$ esetén az (1) alakból kapjuk, ha pedig $-2 < t < 2$, akkor a (2)-ből.

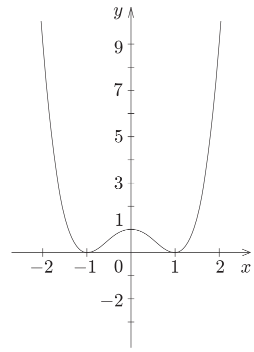
Megjegyzések. 1. Adott $p(x) = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ felbontásból kiindulva természetesen végtelen sok felbontást kaphatunk, ha az egyik tényezőt megszorozzuk egy nullától különböző számmal, a másikat pedig elosztjuk vele. Az ilyen felbontásokat azonban érthető módon nem tekintjük lényegesen különbözőnek.

2. A többféle felbontás megléte azon múlik, hogy hány valós gyöke van a $p(x) = 0$ egyenletnek. Könnyen igazolható, – például az egyenlet megoldásával vagy a $p(x)$ grafikonjának fölrajzolásával, – hogy ha $t > -2$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke (*1. ábra*). Ilyenkor a négy komplex gyök két párba sorolható, ahol a párok tagjai egymás konjugáltjai. A megfelelő gyöktényezőket csak egyféleképpen lehet úgy párba állítani, hogy a szorzatuk valós együtthatós másodfokú polinom legyen.



1. ábra

Ha $t = -2$, akkor a $p(x) = 0$ egyenletnek két kétszeres valós gyöke van (*2. ábra*). Ekkor a gyöktényezőkből három másodfokú polinom építhető: $(x-1)(x+1)$, $(x-1)(x-1)$ és $(x+1)(x+1)$. Az utóbbi kettő csak egymással szorozható, az első pedig önmagával, így ebben az esetben kétféle felbontást kapunk.

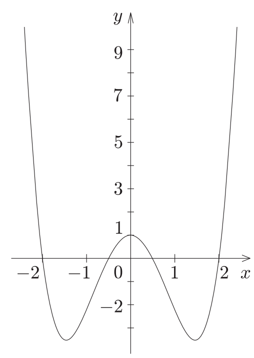


2. ábra

Végül ha $t < -2$, akkor a $p(x) = 0$ egyenletnek négy különböző valós gyöke van (*3. ábra*) Ezek közül bármely kettőhöz tartozó gyöktényezőt összeszorozva $p(x)$ másodfokú valós együtthatós tényezőjét kapjuk, ilyenkor háromféle szorzat-alak létezik. Ha például $t = -\frac{17}{4}$, akkor a $p(x) = x^4 - \frac{17}{4}x^2 + 1$ polinom gyökei: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$, a háromféle szorzat-alak pedig:

$$p(x) = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x^2 - 4) = \left(x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right)\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) =$$

$$= \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right).$$



3. ábra