

Megoldás. Vegyük észre, hogy az a_n sorozat minden eleme páratlan. Rögzítsük az n értékét és tekintsük a sorozat a_n -nel kezdődő elemeinek a_n szerinti maradékait; legyen ez a b sorozat. A sorozat első eleme b_n , ami nyilván 0.

Azt kell bebizonyítanunk, hogy létezik olyan n -től különböző k , amelyre szintén igaz, hogy $b_k = 0$. (Ez jelenti azt, hogy a_k osztható a_n -nel.)

A b sorozat véges sok értéket vehet fel ($0 \leq b_i \leq a_n - 1$), mert értékei az a_n szerinti osztás maradékai. Mivel azonban b_n végtelen sorozat, azért biztosan lesz olyan érték, amelyet végtelen sokszor vesz fel. Tegyük fel, hogy $b_s = b_{s+t}$. A rekurzív képzési szabály miatt az s -edik elemtől és az $(s+t)$ -edik elemtől a maradékok ugyanúgy folytatódnak, tehát a b sorozat az s indextől kezdve biztosan periodikus. Ettől azonban még nem lenne feltétlenül szükséges, hogy ebben a periódusban szerepeljen a 0 maradék.

Vizsgáljuk visszafelé a maradékokat: b_s a $2b_{s-1} + 1$, míg b_{s+t} a $2b_{s+t-1} + 1$ elemnek az a_n szerinti maradékával egyenlő. De ha $2b_{s-1} + 1$ és $2b_{s+t-1} + 1$ ugyanazt a maradékot adja egy páratlan számmal (a_n -nel) osztva, akkor a_n osztja a különbségüket:

$$a_n \mid 2(b_{s+t-1} - b_{s-1}).$$

Az a_n páratlan lévén, $a_n \mid (b_{s+t-1} - b_{s-1})$, tehát ugyanazt a maradékot adják a_n -nel osztva, azaz $b_{s-1} = b_{s+t-1}$.

Ez azt jelenti, hogy b_s -től visszafelé is periodikusak a maradékok egészen b_n -ig, vagyis a 0 is végtelen sokszor ismétlődő maradék.